

Aufstellen und numerische Integration der ballistischen Differentialgleichungen

Dr. Ulrich Mende

Inhaltsverzeichnis

1	Das ballistische Grundproblem.....	2
1.1	Historie und Literatur.....	2
1.2	Differentialgleichungen.....	2
1.3	Analytische Lösungen und Approximationsverfahren.....	5
1.4	Sonderfall: Senkrechter Schuss nach oben – analytische Lösung.....	5
1.4.1	Steigen der Kugel.....	5
1.4.2	Fallen der Kugel.....	7
1.4.3	Zahlenbeispiel und grafische Darstellungen.....	9
1.4.4	Höhenabhängigkeit der Luftdichte und der Schwerkraft.....	11
1.5	Numerische Integration der DGLn mit EXCEL-VBA.....	12
2	Das VBA-EXCEL-Programm Ballistik.xlsm.....	13
2.1	Funktionen, Bedienung, Download.....	13
2.2	VBA-Code im Projekt Ballistik.xlms“.....	16
2.2.1	Berechnungsfunktionen: Klassenmodul „ClassBaKu“.....	16
2.2.2	Oberflächenfunktionen: Modul „Arbeitsblatt“.....	19
3	Beispielberechnungen.....	20
3.1	Schiefer Wurf ohne Luftwiderstand.....	20
3.2	Senkrechter Schuss in die Luft.....	22
3.3	Beispiel mit Start- und Zielpunkt auf demselben Niveau.....	23
3.4	Abschlag eines Tennisballs von einer Pyramidenspitze.....	24
3.5	Schuss auf ein verdecktes, tieferliegendes Ziel.....	26
3.6	Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme.....	29
3.7	Berechnung der Winkel bei Vorgabe der Weite.....	31
3.8	Beschleunigungsberechnung am Beispiel eines Meteors.....	32
4	Literatur.....	36

1 Das ballistische Grundproblem

1.1 Historie und Literatur

Die Ballistik als Lehre der geschossenen oder geworfenen Körper ist schon mehrere hundert Jahre alt. Besondere mathematische Fortschritte wurden im 17. Und 18. Jahrhundert durch Newton, Euler, Bernoulli, Lambert und andere erzielt. Dabei wurde die Beschäftigung mit der Ballistik überwiegend militärisch forciert, teilweise direkt beauftragt. Es ging letztlich um die Berechnung der Flugbahnen von Kanonen- / Gewehrkugeln bzw. um die Flugbahnen abgeworfener Bomben.

Eine umfassende Darstellung der mathematischen Grundlagen der Ballistik zusammen mit interessanten historischen Angaben ist in dem eBook „Die mathematische Theorie ballistischer Kurven“ von Eugen Willerding enthalten. Man kann das eBook kostenlos im Internet herunterladen. Dieses richtet sich allerdings eher an Mathematiker und Physiker als an Ingenieure. Das Buch sei hier jedem nachhaltig empfohlen, der sich für die Materie interessiert.

1.2 Differentialgleichungen

Newton hat erkannt, dass bei turbulenter Strömung die folgende quadratische Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Geschwindigkeit besteht:

$F = \frac{c_W \cdot A \cdot \rho_L}{2} \cdot v^2 = m \cdot k \cdot v^2 \quad k = \frac{c_W \cdot A \cdot \rho_L}{2 \cdot m}$	1
---	---

Dabei sind:

- A die wirksame Querschnittsfläche des bewegten Körpers
- c_W der Widerstandsbeiwert des Körpers, der von dessen Geometrie abhängt ($c_W(\text{Kugel})=0,45$)
- ρ_L die Dichte des durchlaufenen Mediums (Luft)
- m die Masse des Körpers
- v die momentane Bahngeschwindigkeit
- k die abgeleitete ballistische Konstante der gesamten Anordnung

Speziell für eine Kugel kann man die Formel für die ballistische Konstante so schreiben:

$k_{\text{Kugel}} = \frac{c_W \cdot A_{\text{Kugel}} \cdot \rho_L}{2 \cdot m_{\text{Kugel}}} = \frac{c_W \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \rho_L}{2 \cdot \frac{\pi}{6} D^3 \cdot \rho_K} = \frac{3 \cdot 0,45 \cdot \rho_L}{4 \cdot D \cdot \rho_K}$	2
--	---

Da die bremsende Querschnittsfläche mit D^2 wächst, die beharrende Masse aber mit D^3 , wird die Widerstandskraft also mit dem Durchmesser und mit der Dichte der Kugel (oder allgemeiner des Körpers) abnehmen. Wie wir bei der Ableitung der Differentialgleichungen weiter unten sehen werden, ist k der Beschleunigung (bzw. Verzögerung) durch das Medium proportional.

Wenn sich ein Körper unter Einfluss der Schwerkraft durch das Medium bewegt, dann entstehen sog. ballistische Kurven. Der Strömungswiderstand nach Gl (1) ist dabei der Bahngeschwindigkeit des Körpers zu jedem Zeitpunkt genau entgegengerichtet. Damit sind die Differentialgleichungen der ballistischen Kurve für die Koordinaten x und y leicht ableitbar – s. Abbildung 1.

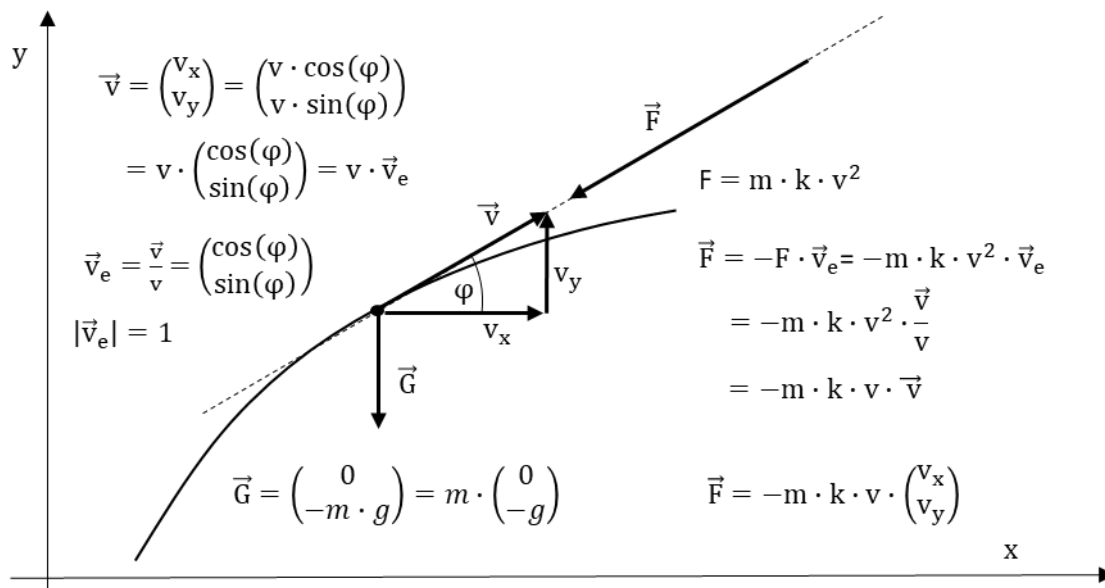


Abbildung 1: Vektorielle Darstellung der Kräfte einer ballistischen Kurve

Wir zerlegen die Bahngeschwindigkeit v , die stets tangential zur Kurve gerichtet ist, in ihre x - und y -Komponenten bzw. in ein Vielfaches des Geschwindigkeits-Einheitsvektors:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot \cos(\varphi) \\ v \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = v \cdot \vec{v}_e \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_e = \frac{\vec{v}}{v} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_e = 1$	3
--	---

Da die Bremskraft F des Luftwiderstandes der Bahngeschwindigkeit v stets entgegengerichtet ist, lässt sich der Vektor von F über den negativen Einheitsvektor der Bahngeschwindigkeit ausdrücken.

$\vec{F} = -F \cdot \vec{v}_e = -m \cdot k \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{v}}{v} = -m \cdot k \cdot v \cdot \vec{v} = -m \cdot k \cdot v \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$	4
--	---

Wir nehmen im Weiteren die y -Achse als senkrecht zur Erdoberfläche nach oben gerichtet an. Die x -Achse ist dann parallel zur Erdoberfläche gerichtet, welche als eben angenommen wird. Die konstante Gewichtskraft G wirkt damit stets entgegen der y -Achse; eine x -Komponente hat sie nicht.

$$\vec{G} = G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = m \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Nach dem Newtonschen Grundgesetz bekommt man:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \vec{G} + \vec{F} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - m \cdot k \cdot v \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Die Masse kürzt sich heraus und man bekommt die grundlegenden DGLn der Ballistik:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k \cdot v \cdot v_x \\ g + k \cdot v \cdot v_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k \cdot v_x \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ g + k \cdot v_y \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{pmatrix}$$

5

Obwohl Gl (5) keine explizite Abhängigkeit von der Masse m enthält, hängen die ballistischen Kurven trotzdem von der Masse ab, da diese implizit in die ballistische Konstante k eingeht. Man kann an dieser Stelle bereits sagen: Je größer die Masse, desto kleiner die ballistische Konstante und desto kleiner ist der Luftwiderstand relativ zum Gewicht. Kleinere und leichtere Körper werden also stärker abgebremst als große und schwere Körper. Für $k=0$ ergibt sich aus Gl (5) wieder die reine Beziehung für die Schwerkraft.

Gl (5) gilt sowohl für das Aufsteigen als auch für das Fallen des Körpers.

In der Literatur zur Ballistik wird oft anstelle von k die sog. Grenzgeschwindigkeit oder Sinkgeschwindigkeit v_∞ verwendet. Diese stellt sich bei einem senkrecht fallenden Körper nach hinreichend langer Zeit ein, wenn sich nämlich Schwerkraft und Widerstandskraft gerade aufheben.

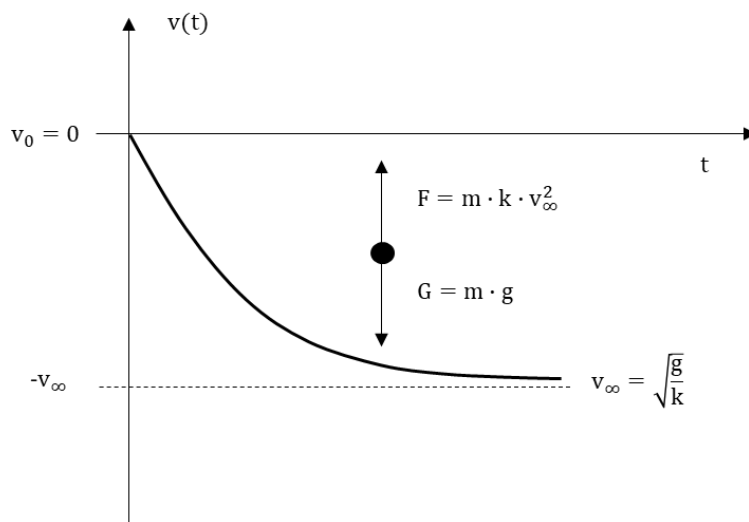


Abbildung 2: Definition der Grenzgeschwindigkeit

$$m \cdot g = m \cdot k \cdot v_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

6

Damit kann man Gl (5) weiter vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} \frac{v \cdot v_x}{v_\infty^2} \\ 1 + \frac{v \cdot v_y}{v_\infty^2} \end{pmatrix} = -\frac{g}{v_\infty^2} \begin{pmatrix} v_x \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ v_\infty^2 + v_y \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{pmatrix}$$

7

Die Gleichungen (7) sind die Grundgleichungen der Ballistik. Es sind gekoppelte, nichtlineare DGLn. Gekoppelt bedeutet in diesem Fall, dass die Beschleunigung (die Kraft) in x-Richtung nicht nur von der x-Komponente der Geschwindigkeit, sondern eben auch von der y-Komponente der Geschwindigkeit abhängt – und umgekehrt. Diese beiden DGLn lassen sich nicht mehr separat lösen lassen. Eine vollständig analytische Lösung wie im Falle des schrägen Wurfs ohne Luftwiderstand ist nicht möglich.

1.3 Analytische Lösungen und Approximationsverfahren

Im o.g. eBook von Eugen Willerding [Willerding] werden eine Fülle von Approximationsverfahren, von Euler, Newton, Bernoulli und anderen dargestellt. So gibt es eine analytische Lösung für schnelle, flache Bahnen nach Lambert:

$$y(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{4 \cdot k^2 \cdot v_0^2} \cdot \left(e^{\frac{2 \cdot k \cdot x}{\cos(\alpha)}} - \frac{2 \cdot k \cdot x}{\cos(\alpha)} - 1 \right)$$

oder Reihenentwicklungen für die Ballistischen Kurven. Das soll hier nicht wiederholt werden. Wir zeigen stattdessen, wie die Gl (5) sehr einfach integriert werden können.

1.4 Sonderfall: Senkrechter Schuss nach oben – analytische Lösung

Beim senkrechten Schuss nach oben gibt es keine Anfangs-Geschwindigkeit und auch keinerlei Kräfte in x-Richtung, deshalb ist $x(t) \equiv 0$. Von dem DGL-System (5) bleibt daher nur die y-Komponente übrig. Wir ersetzen $v_y(t)$ durch $v(t)$ und bezeichnen mit v_0 die senkrecht nach oben gerichteter Anfangsgeschwindigkeit.

$\dot{v} = -(g + k \cdot v \cdot v)$	8
--	---

BEACHTE:

Aus dem stets positiven Betrag der Bahngeschwindigkeit in Gl (5) wird der Betrag der Geschwindigkeit: $|v|$. Gl (8) gilt für das Steigen ($v > 0$, $|v|=v$) genauso wie für das Fallen ($v < 0$, $|v|=-v$). Leider lässt sich die Betragsfunktion schlecht integrieren, weshalb wir den Vorgang in zwei Teile zerlegen müssen: steigen und fallen.

$\dot{v} = \begin{cases} -(g + k \cdot v^2) = -g \cdot \left(1 + \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \right) & \text{für } v \geq 0 \\ -(g - k \cdot v^2) = -g \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \right) & \text{für } v \leq 0 \end{cases}$	9
--	---

1.4.1 Steigen der Kugel

In der oberen Gl (9) trennen wir die Veränderlichen v und t , um zu integrieren:

$$\frac{dv}{dt} = -g \cdot \left(1 + \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{dv}{v_\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2} = -\frac{g}{v_\infty} \cdot dt$$

Mit Hilfe des Grundintegrals auf der linken Seite wird:

$$\int \frac{\frac{dv}{v_\infty}}{1 + \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2} = \arctan\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = -\frac{g \cdot t}{v_\infty} + C$$

Mit $v(0)=v_0$ wird

$$\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) = C$$

Damit haben wir das v-t-Gesetz für das Aufsteigen:

$$v(t) = v_\infty \cdot \tan\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) - \frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)$$

Daraus können wir sofort die Steigzeit T_S ablesen, die ja gerade $v(T_S)=0$ bedeutet:

$T_S = \frac{v_\infty}{g} \cdot \arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) \leq \frac{v_\infty}{g} \cdot \frac{\pi}{2}$	10
---	----

Das ist überraschend: Wenn die Anfangsgeschwindigkeit groß gegenüber der Grenzggeschwindigkeit v_∞ ist, dann hängt die Steigzeit gar nicht mehr von v_0 ab. Auch wenn man die Kugel immer schneller losschießt erreicht sie stets in derselben Zeit das Maximum. Wie wir gleich sehen werden, darf man aber nicht folgern, dass es auch für die erreichbare Höhe H ein Maximum unabhängig von v_0 gibt.

Mit der Steigzeit T_S bekommen wir letztlich für die Geschwindigkeit im Aufsteigen:

$v(t) = v_\infty \cdot \tan\left(\frac{g}{v_\infty}(T_S - t)\right)$	11
--	----

Zur Berechnung des Verlaufes von $y(t)$ müssen wir die Gl (11) integrieren.

$$y(t) = \int v(t) \cdot dt = v_\infty \cdot \int \tan\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) - \frac{g \cdot t}{v_\infty}\right) \cdot dt$$

Mit dem Grundintegral

$$\int \tan(a - b \cdot x) \cdot dx = \frac{\ln(|\cos(b \cdot x - a)|)}{b} + C$$

Wird daraus

$$y(t) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \left[\ln\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) - \frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)\right) + C \right]$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0)=0$ kann man die Integrationskonstante C bestimmen:

$$C = \ln\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)\right)\right)$$

$y(t) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln\left(\frac{\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) - \frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)}{\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)\right)}\right) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{g}{v_\infty} \cdot (T_S - t)\right)}{\cos\left(\frac{g}{v_\infty} \cdot T_S\right)}\right)$	12
---	----

Setzt man nun in Gl (12) die Steigzeit T_S ein, so bekommt man die maximale Höhe H:

$H = y(T_S) = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)\right)}\right) = \frac{v_\infty^2}{2 \cdot g} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2\right)$	13
--	----

Obwohl also die Steigzeit begrenzt ist und für große v_0 nicht mehr von v_0 abhängt, nimmt die maximale Höhe doch mit dem Logarithmus der Anfangsgeschwindigkeit zu. In der Gl (13) sind zwei Grenzübergänge interessant. Für verschwindenden Luftwiderstand ($v_\infty \rightarrow \infty$) bekommt man wieder die maximale Höhe nach dem Energiesatz, da kein Energieverlust durch den Luftwiderstand auftritt:

$$\lim_{v_\infty \rightarrow \infty} H = \lim_{v_\infty \rightarrow \infty} \frac{v_\infty^2}{2 \cdot g} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2\right) = \frac{v_\infty^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Für $v_0 \gg v_\infty$ vereinfacht sich die Beziehung:

$$H = \frac{v_\infty^2}{g} \cdot \ln\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$$

1.4.2 Fallen der Kugel

Aus dem unteren Teil von Gl (9) kann die Geschwindigkeitsfunktion wieder mittels Trennung der Veränderlichen berechnet werden:

$$\frac{dv}{dt} = -g \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{g}{v_\infty} \cdot dt; \quad x = \frac{v}{v_\infty}; \quad |x| \leq 1; \quad x < 0$$

Der wesentliche Unterschied besteht im Pluszeichen vor der Beschleunigung, die durch den Luftwiderstand hervorgerufen wird. Diese ist positiv bezüglich der nach oben gerichteten y-Achse. (Aber negativ, also bremsend bezüglich der negativen Fallgeschwindigkeit).

In den Anfangsbedingungen ist die Geschwindigkeit gleich Null, dafür ist der Anfangswert $y(0)$ gleich der beim Aufsteigen erreichten Höhe H.

BEACHTEN:

Der Nullpunkt der Zeitachse wird für diese Berechnung auf den Moment gelegt, in dem H

erreicht wird. Für den Gesamtvorgang muss das Ergebnis des Fallens dann um T_S verschoben werden.

Mit dem Grundintegral auf der linken Seite wird daraus:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\ln(|x+1|) - \ln(|x-1|)}{2} = -\frac{g \cdot t}{v_\infty} + C$$

Nach Auflösen der Betragsfunktion kann geschrieben werden:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{2 \cdot g \cdot t}{v_\infty} + C$$

Wegen der verschwindenden Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit verschwindet auch C:

$$x(0) = \frac{v(0)}{v_\infty} = 0 = -\frac{2 \cdot g \cdot 0}{v_\infty} + C = C = 0$$

Also:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{2 \cdot g \cdot t}{v_\infty} \Rightarrow x = -\frac{e^{-\frac{2 \cdot g \cdot t}{v_\infty}} - 1}{e^{-\frac{2 \cdot g \cdot t}{v_\infty}} + 1} = -\frac{e^{-\frac{g \cdot t}{v_\infty}} - e^{+\frac{g \cdot t}{v_\infty}}}{e^{-\frac{g \cdot t}{v_\infty}} + e^{+\frac{g \cdot t}{v_\infty}}} = \tanh\left(-\frac{g \cdot t}{v_\infty}\right) = -\tanh\left(\frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)$$

$v(t) = \dot{y}(t) = -v_\infty \cdot \tanh\left(\frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)$	14
--	----

Die kompakte Gleichung ist verständlich: für $t=0$ ist die Geschwindigkeit = 0 (Umkehrpunkt), für große t geht sie gegen die Grenzggeschwindigkeit v_∞ .

Um die Höhenfunktion $y(t)$ zu erhalten, muss Gl (14) integriert werden:

$$y(t) = \int v(t) \cdot dt = -v_\infty \cdot \int \tanh\left(\frac{g \cdot t}{v_\infty}\right) \cdot dt = -\frac{v_\infty^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)\right) + C$$

Wegen $\ln(\cosh(0)) = \ln(1) = 0$ folgt sofort $C=H$, also:

$y(t) = H - \frac{v_\infty^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{g \cdot t}{v_\infty}\right)\right)$	15
--	----

Für die Fallzeit bekommt man aus Gl (15) sofort:

$T_F = \frac{v_\infty}{g} \cdot \operatorname{arcosh}\left(e^{\left(\frac{H \cdot g}{v_\infty^2}\right)}\right)$	16
--	----

Die erstaunlich kompakte Gleichung (15) lässt sich durch Auflösen des Cosh auf die folgende Form bringen:

$y(t) = H - v_{\infty} \cdot t + \frac{v_{\infty}^2}{g} \cdot \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{2 \cdot g \cdot t}{v_{\infty}}}}\right) = H - v_{\infty} \cdot t + \Delta y(t)$	17
---	----

Die beiden ersten Terme in Gl (17) beschreiben zusammen $v(t)$ für den Fall, dass der Körper aus der Höhe H mit der konstanten Grenzgeschwindigkeit v_{∞} nach unten fällt. Diese Grenzgeschwindigkeit wird aber erst für steigende t -Werte erreicht. Der dritte Term $\Delta y(t)$ beschreibt diesen Übergang. Dabei gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y(t) = \frac{v_{\infty}^2}{g} \cdot \ln(2) = \Delta y = \text{const.}$$

Die Kurve von $y(t)$ folgt demnach für große t -Werte der Kurve $H - v_{\infty} \cdot t$ mit einem konstanten Abstand von Δy . Da der Anstieg der Bezugsgeraden gerade v_{∞} ist, entspricht das auf der Zeitachse einer konstanten „Verspätung“ um ΔT :

$$v_{\infty} = \frac{\Delta y}{\Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\Delta y}{v_{\infty}} = \frac{v_{\infty}}{g} \cdot \ln(2)$$

Für hinreichend große Werte von H ergibt sich daher für die Fallzeit:

$T_F = \frac{H}{v_{\infty}} + \Delta T = \frac{H}{v_{\infty}} + \frac{v_{\infty}}{g} \cdot \ln(2) = \frac{v_{\infty}}{g} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot v_0}{v_{\infty}}\right)$	18
--	----

Die Gl (18) ergibt sich auch direkt durch einen Grenzübergang aus Gl (16).

1.4.3 Zahlenbeispiel und grafische Darstellungen

Die folgende Abbildung zeigt das v - t -Diagramm und darunter das y - t -Diagramm für die konkreten Zahlenwerte:

$$v_0 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_{\infty} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeit ist am Anfang hoch (v_0) und sinkt schnell ab, da die Schwerkraft und vor allem der Luftwiderstand stark bremsend wirken. Zum Zeitpunkt $t = T_s$ ist der Scheitelpunkt erreicht, und die Geschwindigkeit ist Null. In der Umgebung des Zenits beträgt die Beschleunigung gerade $-g$, da der Luftwiderstand verschwindet. Die Geschwindigkeit wechselt das Vorzeichen und strebt gegen die (negative) Grenzgeschwindigkeit v_{∞} , mit der die Kugel auf der Erde auftrifft.

Die Höhe $y(t)$ steigt am Anfang proportional zu v_0 , dann immer langsamer, bis der Scheitelpunkt erreicht ist. Danach nimmt $y(t)$ wieder ab, die Funktion nähert sich einer Geraden mit der Steigung $-v_{\infty}$. Die Phase des Aufsteigens ist zeitlich kürzer als die des Fallens.

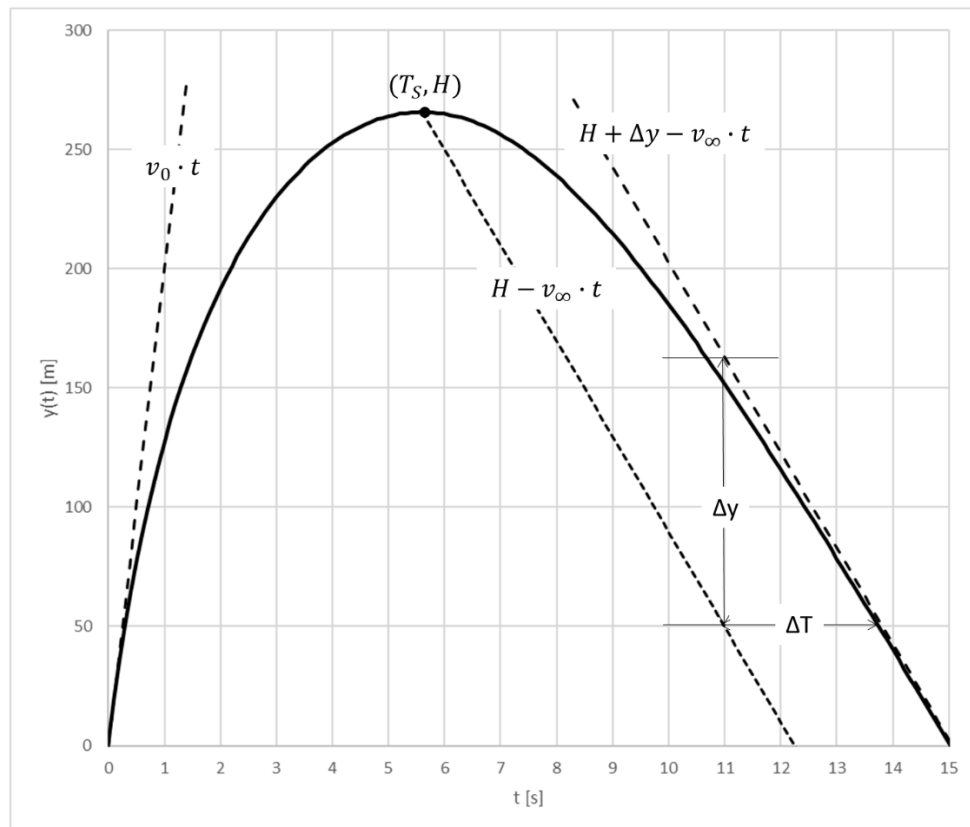
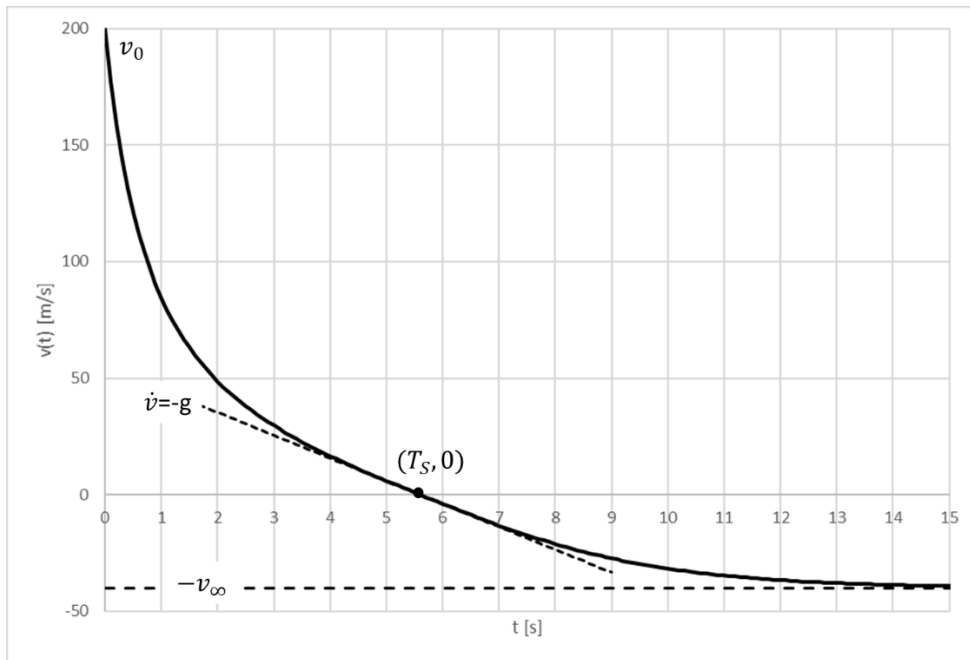


Abbildung 3: v - t -Diagramm und y - t -Diagramm eines senkrechten Schusses nach oben

1.4.4 Höhenabhängigkeit der Luftdichte und der Schwerkraft

Schon frühzeitig hat man versucht, bei indirekten Schüssen über große Höhen die Abhängigkeit der Luftdichte – und damit des Luftwiderstandes – zu berücksichtigen.

Wir rechnen dazu (bei Bedarf) mit dem Dichteverlauf nach der Barometrischen Höhenformel:

$$\rho(y) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot y\right) = \rho_0 \cdot e^{-B \cdot y} \quad \text{mit} \quad B = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g = 1,16 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}}$$

Analog zur Halbwertszeit (z.B. beim radioaktiven Zerfall) kann man hier eine „Halbwertshöhe“ bestimmen, nach der die Dichte sich jeweils halbiert:

$$\frac{\rho(y)}{\rho_0} = e^{-B \cdot h_2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{\ln(2)}{B} \approx 6 \text{ km}$$

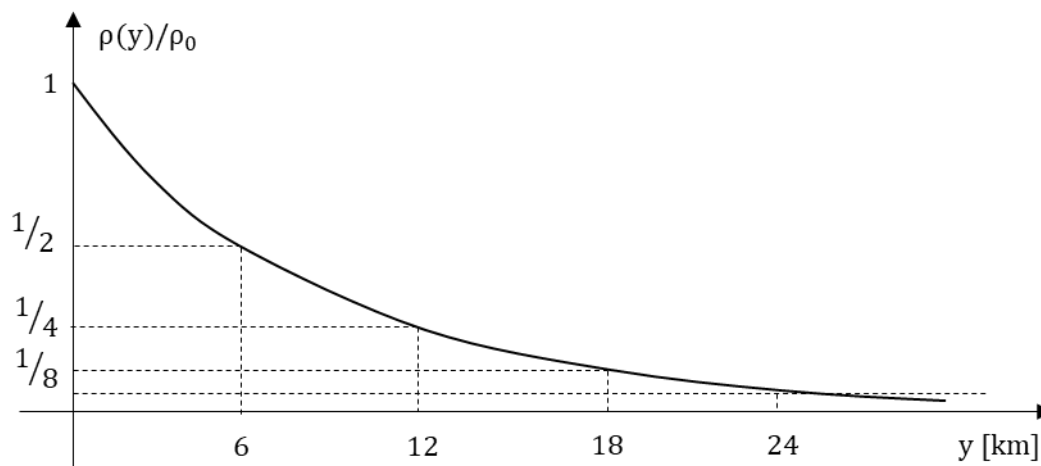


Abbildung 4: Abnahme der Luftdichte mit der Höhe

In 60 km Höhe hat man demnach nur noch $2^{-10} \approx 10^{-3}$ der Dichte an der Erdoberfläche. Bei 120 km Höhe sind es dann nur noch 10^{-6} .

Da die ballistische Konstante k proportional zu ρ ist, muss man in der DGL (5) dann mit einer höhenabhängigen ballistischen „Konstante“ k rechnen:

$$k(y) = k_0 \cdot e^{-B \cdot y}$$

Für die Höhenabhängigkeit der Schwerkraft können wir wegen der bekannten quadratischen Abhängigkeit des Gravitationsfeldes schreiben:

$$g(y) = g \cdot \left(\frac{R_E}{R_E + y}\right)^2 \quad \text{Erdradius } R_E = 6371 \text{ km}$$

Dabei nimmt die Schwerkraft sehr viel langsamer ab als die Luftdichte. Während die Dichte der Erdatmosphäre in 120 km Höhe bereits auf den Faktor 10^{-6} abgesunken ist, beträgt die Schwerkraft dort noch 96% des Wertes auf der Erdoberfläche.

Insgesamt bekommt man die folgenden DGLn:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k(y) \cdot v \cdot v_x \\ g(y) + k(y) \cdot v \cdot v_y \end{pmatrix}$$

1.5 Numerische Integration der DGLn mit EXCEL-VBA

Es geht hier darum zu zeigen, wie man mit einfachen ingenieurtechnischen Mitteln sehr schnell gute Näherungslösungen eines komplizierten mathematischen Problems bekommen kann.

Dazu schreiben wir Gl (5) in differentieller Form:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{pmatrix} dv_x \\ dv_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k \cdot v \cdot v_x \\ g + k \cdot v \cdot v_y \end{pmatrix} \cdot dt \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dv_x \\ dv_y \end{pmatrix}$	19
--	----

Damit kann man – ausgehend von den Werten v_x und v_y zum Zeitpunkt t - die Änderungen der Geschwindigkeiten dv_x und dv_y und damit auch die neuen Geschwindigkeitswerte v_x+dv_x und v_y+dv_y zum Zeitpunkt $t+dt$ berechnen. Für die Änderungen dx und dy der Koordinaten x und y schreibt man einfach:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(v_x(t) + v_x(t + dt))}{2} \\ \frac{(v_y(t) + v_y(t + dt))}{2} \end{pmatrix} \cdot dt = \begin{pmatrix} v_x + \frac{dv_x}{2} \\ v_y + \frac{dv_y}{2} \end{pmatrix} \cdot dt$$

Zur Ermittlung der Wege nehmen wir für die Geschwindigkeiten den Mittelwert im Intervall $[t, t+dt]$. Das liefert die exakten Wege zwar nur für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, die hier allerdings nicht vorliegt. Es scheint aber immer noch besser, als mit konstanten Geschwindigkeiten zu rechnen.

Zur Ermittlung der Geschwindigkeiten v_x und v_y sowie der Wege x und y zu einem bestimmten Zeitpunkt t beginnt man mit den Startwerten für die Geschwindigkeiten und für die Koordinaten und summiert solange auf, bis die laufende Zeit t erreicht wurde.

Im Folgenden wird ein VBA-EXCEL-Programm vorgestellt, das die Integration nach Gl (19) ausführt.

2 Das VBA-EXCEL-Programm Ballistik.xlsm

2.1 Funktionen, Bedienung, Download

Das Programm berechnet mehrere ballistische Kurven nach Gl (19).

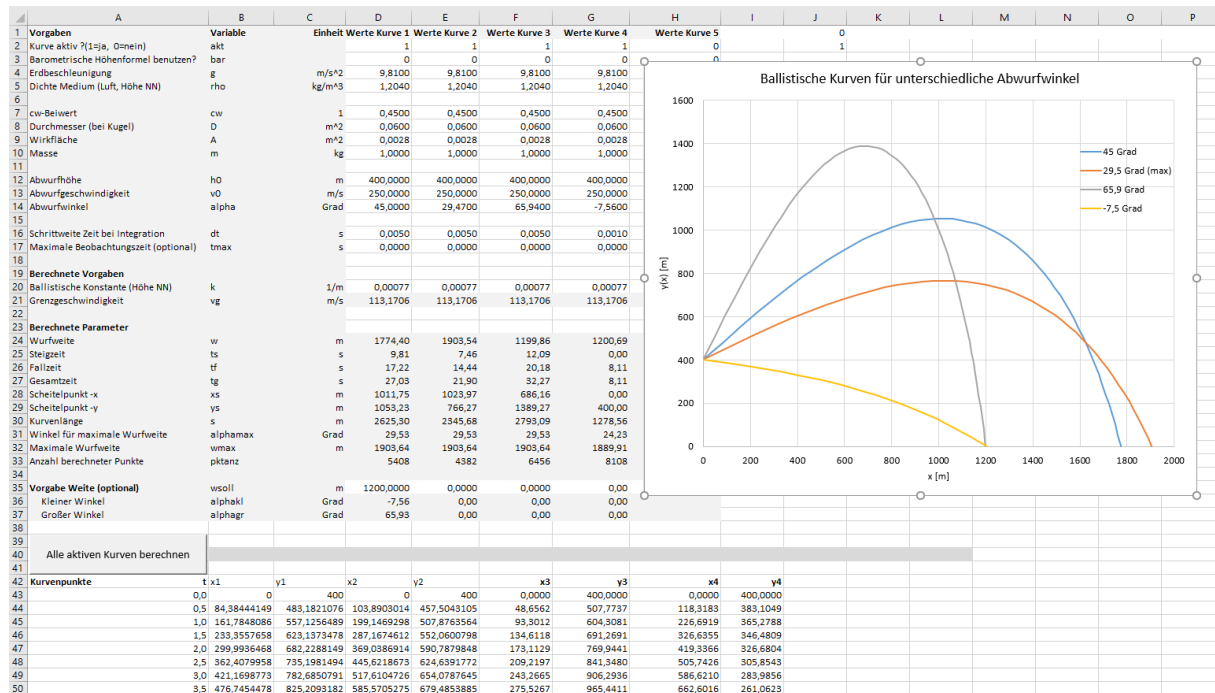


Abbildung 5: Oberfläche des Programms Ballistik.xlsm

Die Oberfläche gliedert sich in mehrere Zeilenbereiche; graue Bereiche sollten nicht geändert werden, eingabebereite Zellen sind weiß.

In den oberen 10 Zeilen werden die Parameter für die Kurven eingegeben. In den Spalten A-C werden die Parameter mit Langtext, Variable und Einheit erfasst. Ab Spalte D folgen die Werte der Parameter für die Kurven. Die Kurvenanzahl wurde im Programm auf 5 begrenzt, was aber in keiner Weise zwingend ist.

Die Variablenbezeichnungen entsprechen weitestgehend denen im Text und werden auch im Programm verwendet. Sie dürfen nicht verändert werden, da über diese Namen das EXCEL-Sheet ausgelesen bzw. beschrieben wird.

Manche der Vorgabe-Parameter sind Konstanten, manche (v_g , k) werden daraus berechnet.

Die berechneten Parameter entsprechen ebenfalls denen im Text. Insbesondere werden auch die maximale Weite w_{max} und der dazu führende Winkel α_{max} berechnet.

Wenn man ganz unten eine Sollweite $w_{soill} <> 0$ vorgibt, dann berechnet das Programm die beiden zu dieser Weite führenden Winkel.

Mit der Taste „Alle aktiven Kurven berechnen“ wird eine Neuberechnung aller aktiven Kurven (Parameter akt = 1) angestoßen. Alte Werte werden dabei überschrieben. Wenn man eine Kurve (vorübergehend) aus der Berechnung ausschließen möchte, dann setzt man die Variable „akt“ auf 0.

Abbildung 6 zeigt die Parameter für 4 ballistische Kurven. Das Geschoss ist in allen Fällen dasselbe, ebenso die Abwurfhöhe und -geschwindigkeit. Lediglich der Abwurfwinkel variiert – siehe Umrandung. Bei Kurve 1 wurden willkürlich 45° gewählt. Bei der Berechnung der Kurve 1 wurde der Winkel α_{max} sowie die beiden Winkel α_{kl} (=7,56°) und α_{gr} (=65,93°) für eine Weite w_{soill} von 1200 m berechnet.

Für diese drei Winkel aus Kurve 1 wurden dann die Kurven 2-3 berechnet.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Vorgaben	Variable	Einheit	Werte Kurve 1	Werte Kurve 2	Werte Kurve 3	Werte Kurve 4	Werte Kurve 5
2	Kurve aktiv?(1=ja, 0=nein)	akt		1	1	1	1	0
3	Barometrische Höhenformel benutzen?	bar		0	0	0	0	0
4	Erdbeschleunigung	g	m/s^2	9,8100	9,8100	9,8100	9,8100	
5	Dichte Medium (Luft, Höhe NN)	rho	kg/m^3	1,2040	1,2040	1,2040	1,2040	
6								
7	cw-Beiwert	cw	1	0,4500	0,4500	0,4500	0,4500	
8	Durchmesser (bei Kugel)	D	m^2	0,0600	0,0600	0,0600	0,0600	
9	Wirkfläche	A	m^2	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	
10	Masse	m	kg	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
11								
12	Abwurfhöhe	h0	m	400,0000	400,0000	400,0000	400,0000	
13	Abwurfgeschwindigkeit	v0	m/s	250,0000	250,0000	250,0000	250,0000	
14	Abwurfwinkel	alpha	Grad	45,0000	29,4700	65,9400	-7,5600	
15								
16	Schrittweite Zeit bei Integration	dt	s	0,0050	0,0050	0,0050	0,0010	
17	Maximale Beobachtungszeit (optional)	tmax	s	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
18								
19	Berechnete Vorgaben							
20	Ballistische Konstante (Höhe NN)	k	1/m	0,00077	0,00077	0,00077	0,00077	
21	Grenzgeschwindigkeit	vg	m/s	113,1706	113,1706	113,1706	113,1706	
22								
23	Berechnete Parameter							
24	Wurfweite	w	m	1774,40	1903,54	1199,86	1200,69	
25	Steigzeit	ts	s	9,81	7,46	12,09	0,00	
26	Fallzeit	tf	s	17,22	14,44	20,18	8,11	
27	Gesamtzeit	tg	s	27,03	21,90	32,27	8,11	
28	Scheitelpunkt -x	xs	m	1011,75	1023,97	686,16	0,00	
29	Scheitelpunkt -y	ys	m	1053,23	766,27	1389,27	400,00	
30	Kurvenlänge	s	m	2625,30	2345,68	2793,09	1278,56	
31	Winkel für maximale Wurfweite	alphamax	Grad	29,53	29,53	29,53	24,23	
32	Maximale Wurfweite	wmax	m	1903,64	1903,64	1903,64	1889,91	
33	Anzahl berechneter Punkte	pktanz		5408	4382	6456	8108	
34								
35	Vorgabe Weite (optional)	wsoll	m	1200,0000	0,0000	0,0000	0,00	
36	Kleiner Winkel	alphakl	Grad	-7,56	0,00	0,00	0,00	
37	Großer Winkel	alphagr	Grad	65,93	0,00	0,00	0,00	
38								
39								
40	Alle aktiven Kurven berechnen							
41								

Abbildung 6: Vorgegebene und berechnete Parameter ballistischer Kurven im Programm MendeBallistik.xmlms

Die Kurven 3 und 4 ergeben tatsächlich die geforderte Wurfweite von 1200 m. Kurve 2 ist die Kurve mit maximaler Wurfweite. Bei Kurve 4 wurde eine verringerte Schrittweite gewählt.

Bei der Berechnung wurden für alle Kurven die Zeitreihen für die Koordinaten x, y, die Geschwindigkeiten v_x , v_y sowie die Beschleunigungen a_x , a_y ermittelt und im globalen Speicher abgelegt. Unter den berechneten Parametern steht ganz unten auch die Anzahl von Punkten, die pro Kurve berechnet wurden.

Um diese berechneten Zeitreihen in einem Diagramm darzustellen, werden zunächst in einer Zeitspalte die benötigten Zeiten mit einer passenden Schrittweite erzeugt. Diese wurde hier zu 0,5 s gewählt. Sie sollte stets ein ganzzahliges Vielfaches der Integrations-Schrittweite dt sein. Mit den von VBA bereitgestellten Zugriffsfunktionen werden die globalen Daten ausgelesen und in die EXCEL-Spalten geschrieben.

Definition in VBA: $x(t \text{ As Double}, BaKuNr \text{ As Integer}) \text{ As Double}$

Beispielhafter Aufruf in Zelle B42: $= x(a42; 1; 1)$

Kurvenpunkte	t	x1	y1	x2	y2	x3	y3	x4	y4
42	0,0	0	400	0	400	0,0000	400,0000	0,0000	400,0000
44	0,5	84,38444149	483,1821076	103,8903014	457,5043105	48,6562	507,7737	118,3183	383,1049
45	1,0	161,7848086	557,1256489	199,1469298	507,8763564	93,3012	604,3081	226,6919	365,2788
46	1,5	233,3557658	623,1373478	287,1674612	552,0600798	134,6118	691,2691	326,6355	346,4809
47	2,0	299,9936468	682,2288149	369,0386914	590,7879848	173,1129	769,9441	419,3366	326,6804
48	2,5	362,4079958	735,1981494	445,6218673	624,6391772	209,2197	841,3480	505,7426	305,8543
49	3,0	421,1698773	782,6850791	517,6104726	654,0787645	243,2665	906,2936	586,6210	283,9856
50	3,5	476,7454478	825,2093182	585,5705275	679,4853885	275,5267	965,4411	662,6016	261,0623
51	4,0	529,5198631	863,1979314	649,9693834	701,1709576	306,2267	1019,3332	734,2072	237,0764
52	4,5	579,8146672	897,0052936	711,1967376	719,3951109	335,5563	1068,4203	801,8761	212,0236
53	5,0	627,9006727	926,9279393	769,5802579	734,3760384	363,6760	1113,0791	865,9790	185,9027
54	5,5	674,007655	953,2158147	825,3973939	746,2987315	390,7232	1153,6273	926,8319	158,7153
55	6,0	718,3317489	976,0809485	878,8844416	755,3213838	416,8160	1190,3342	984,7064	130,4659
56	6,5	761,0411625	995,7042465	930,2435984	761,580443	442,0568	1223,4287	1039,8371	101,1612
57	7,0	802,2806381	1012,240903	979,6485276	765,1946608	466,5349	1253,1068	1092,4280	70,8103
58	7,5	842,1749711	1025,824782	1027,248804	766,2683893	490,3285	1279,5356	1142,6579	39,4243
59	8,0	880,831814	1036,572035	1073,173517	764,8942997	513,5065	1302,8588	1190,6838	7,0168
60	8,5	918,3439356	1044,584121	1117,534222	761,1556509	536,1291	1323,1991	1200,5956	0,0165
61	9,0	954,7910679	1049,950405	1160,427406	755,1281995	558,2495	1340,6618		
62	9,5	990,2414407	1052,75039	1201,936564	746,8818161	579,9143	1355,3367		
63	10,0	1024,753088	1053,0557	1242,133977	736,4818537	601,1636	1367,3005		

Abbildung 7: Zugriff auf die im globalen Speicher befindlichen Zeitreihen

Mit den Daten in den Spalten B-I können die ballistischen einfach per Klick in einem Diagramm dargestellt werden. Markiert man die t-Spalte als Abszisse, dann erhält man die Abbildungen für Zeitreihen. Wenn man x-Spalten als Abszisse markiert, bekommt man die eigentlichen ballistischen Kurven.

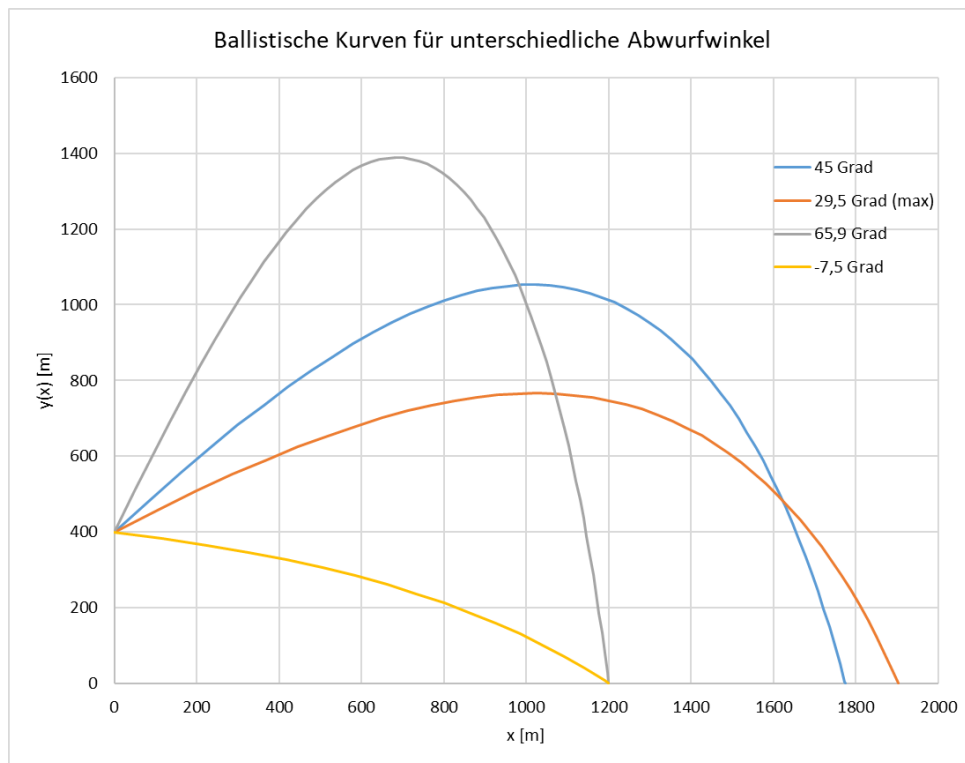


Abbildung 8: Ballistische Kurven

Es können mehrere Diagramme mit unterschiedlichen Kurven / Zeitreihen erzeugt werden.

DOWNLOAD

Das EXCEL-Programm kann unter www.mathe-gut-erklart.de/pdfs/000_ballistik.xlm heruntergeladen werden.

2.2 VBA-Code im Projekt Ballistik.xlms“

Im Programm wird eine strikte Trennung zwischen Oberflächenfunktionen (Zugriff auf das EXCEL-Arbeitsblatt) und den stummen Berechnungsfunktionen vorgenommen.

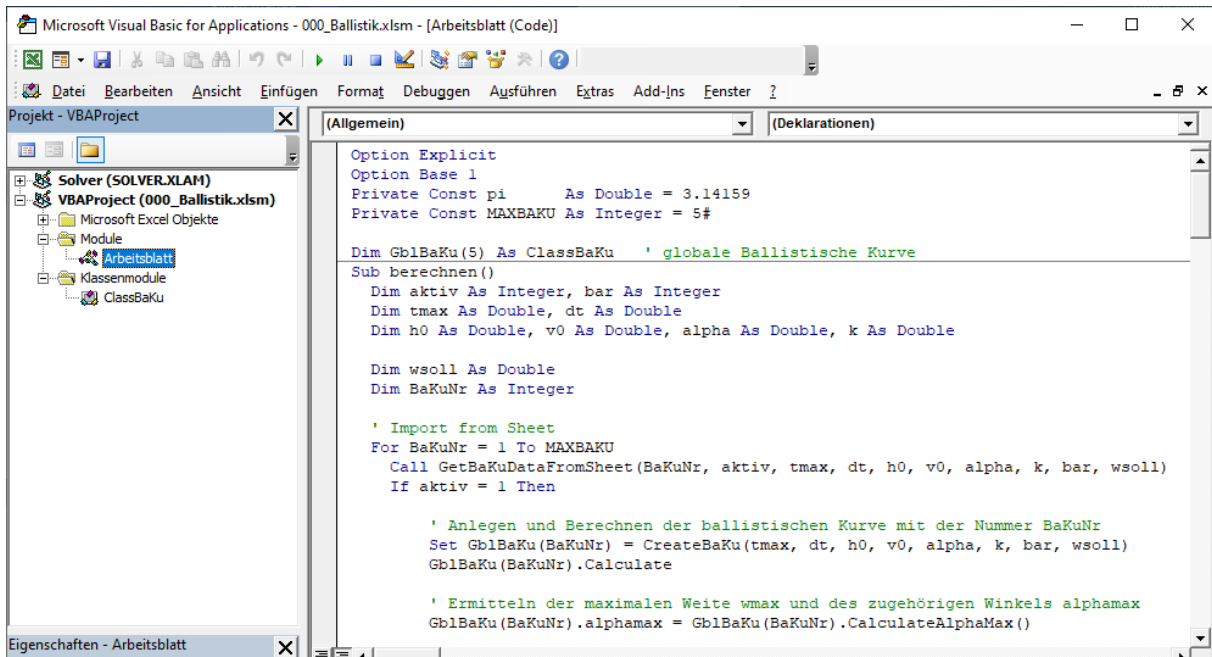


Abbildung 9: VBA-Entwicklungsumgebung mit zwei Moduln

2.2.1 Berechnungsfunktionen: Klassenmodul „ClassBaKu“

Für die Verwaltung mehrerer ballistischer Kurven mit ihren Parametern und den berechneten Kurvenpunkten bietet sich die Objektorientierung an. Diese ist in VBA allerdings sehr spartanisch ausgebaut. (Keine Konstruktoren, keine Vererbung) Trotzdem macht ihr Einsatz Sinn, da man so eine gute Kapselung der Daten erreicht und sich ständige Parameterübergaben durch die Verwendung der Member-Variablen spart. Es wird die Klasse ClassBaKu (=Ballistische Kurve) verwendet.

Folgende Public-Member-Funktionen / Member-Subs werden verwendet:

Name	Funktionsweise
Sub Init(...)	Objekt ClassBaKu anlegen und mit den Parametern initialisieren
Function Calculate(..)	Berechnet der Kurve nach Gl (8) und dabei die Parameter wie ts, tf, xs, ys...
Function CalculateWeite(...)	Berechnet die Weite für einen vorgegeben Winkel
Function CalculateAlphaMax()	Berechnet den Winkel, der die maximale Weite erzielt nach der Methode „Golden Ratio Search“
Function CalculateAlphaGross(...)	Berechnet den größeren der beiden Winkel, die genau eine vorgegebene Weite erzielen
Function CalculateAlphaKlein(...)	Berechnet den kleineren der beiden Winkel, die genau eine vorgegebene Weite erzielen
Funtion(s) x(..), y(..), vx(..), vy(..), ax(..), ay(..)	Zugriffsfunktionen auf Zeitreihen des globalen Speichers.

Der Code ist einfach und selbsterklärend; es werden genau die Variablen aus dem Theorieteil verwendet. Die Werte α_{\max} und w_{\max} für die maximale Wurfweite und die Winkel zur Erzielung einer vorgegebenen Weite lassen sich nur iterativ berechnen.

Berechnung der maximalen Weite und des dafür notwendigen Winkels

Hierzu wird die Methode „Golden Ratio Search“ verwendet - Abbildung 10.

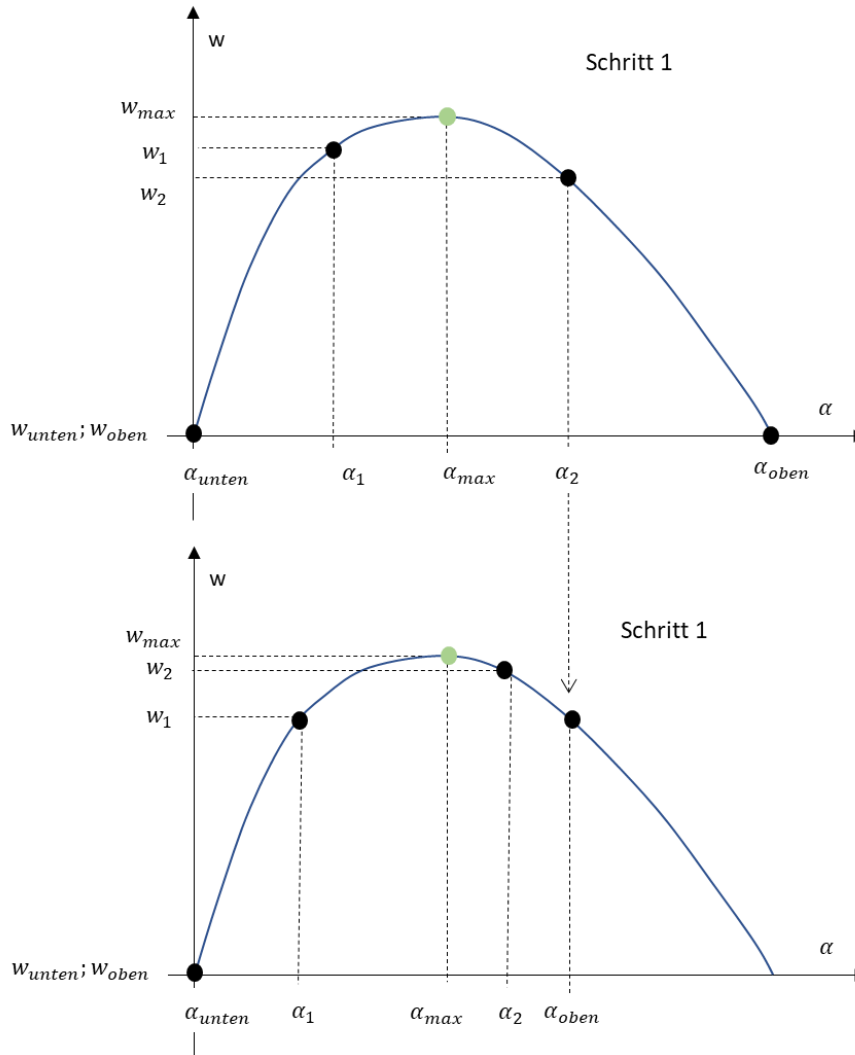


Abbildung 10: Methode Golden Ratio Search zur Bestimmung der maximalen Wurfweite

Diese Methode setzt voraus, dass es in einem Intervall genau ein Maximum gibt; dass die Funktion also von der linken Intervallgrenze streng monoton steigt bis das Maximum erreicht ist und dass sie danach streng monoton fällt, bis die rechte Intervallgrenze erreicht ist. Genau das ist hier der Fall: Man kann relativ leicht zwei Winkel finden, für die gilt: $\alpha_{\text{unten}} < \alpha_{\max} < \alpha_{\text{oben}}$. Nun sucht man sich in diesem Intervall zwei neue Winkel α_1 und $\alpha_2 > \alpha_1$ und berechnet die zugehörigen Weiten w_1 und w_2 .

Bei der folgenden sukzessiven Eingrenzung des unbekanntes Maximums w_{\max} ist es das Ziel, die linke Intervallgrenze schrittweise zu erhöhen bzw. die rechte zu verringern. Im oberen Teil der Abbildung ergab sich $w_{\max} \geq w_1 > w_2 > w_{\text{oben}}$. Das gesuchte Maximum kann nicht kleiner als w_1 sein, also kann man die *rechte* Intervallgrenze auf w_2 ziehen.

Nun bildet man im verkürzten Intervall $[\alpha_{\text{unten}}, \alpha_{\text{oben}}]$ wieder zwei Punkte α_1 und $\alpha_2 > \alpha_1$ – untere Abbildung 10. Dabei entsteht nun der Fall $w_{\text{unten}} < w_1 < w_2 \leq w_{\max}$. Damit kann man die *untere* Intervallgrenze α_{unten} auf w_1 ziehen.

Die Intervallgrenze wird demnach immer durch den kleineren der beiden neuen Werte ersetzt. Wenn α_1 das kleinere w hat, dann wird die linke Intervallgrenze durch w_1 ersetzt; anderenfalls die rechte durch w_2 .

Dieses Verfahren wird wiederholt, bis die Differenz $|\alpha_1 - \alpha_2|$ eine vorgegebene Schranke unterschreitet. Dabei können α_1 und α_2 am Anfang durchaus beide auf derselben Seite von α_{\max} liegen.

Bei dem Verfahren hat es sich als günstig erwiesen, dass die neuen Winkel α_1 und α_2 die Intervalle, in denen sie gewählt werden, jeweils im Goldenen Schnitt teilen.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_{\text{unten}}}{\alpha_{\text{oben}} - \alpha_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_{\text{oben}} - \alpha_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \text{GS} = 1,618$$

Also:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{\text{unten}} + \text{GS} \cdot \alpha_{\text{oben}}}{1 + \text{GS}} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \text{GS} \cdot \alpha_{\text{oben}}}{1 + \text{GS}}$$

Berechnung der zwei Winkel bei Vorgabe der Weite durch Iteration

Wenn man das Maximum (α_{\max}, w_{\max}) ermittelt hat, dann kann man für jede vorgegebene Weite $w_{\text{soll}} < w_{\max}$ zwei Winkel finden, die diese Weite ergeben. (Schießen auf ein Ziel vorgegebener Entfernung).

Diese Winkel werden durch einfache Intervallhalbierung iterativ ermittelt. Wir zeigen das am Beispiel des unteren (kleineren) Winkels. Dieser kann durchaus kleiner als Null sein, wenn man z.B. aus einer hohen Position ($h_0 > 0$) auf ein tieferliegendes Ziel schießt. Man macht sich leicht klar, dass der kleinere Winkel im folgenden Bereich liegt:

$$-\arctan\left[\frac{h_0}{w_{\text{soll}}}\right] = \alpha_{\min} \leq \alpha_{\text{klein}} \leq \alpha_{\max}$$

Durch wiederholte Intervallhalbierung und anpassen der Intervallgrenzen zieht sich das Intervall sukzessive zusammen.

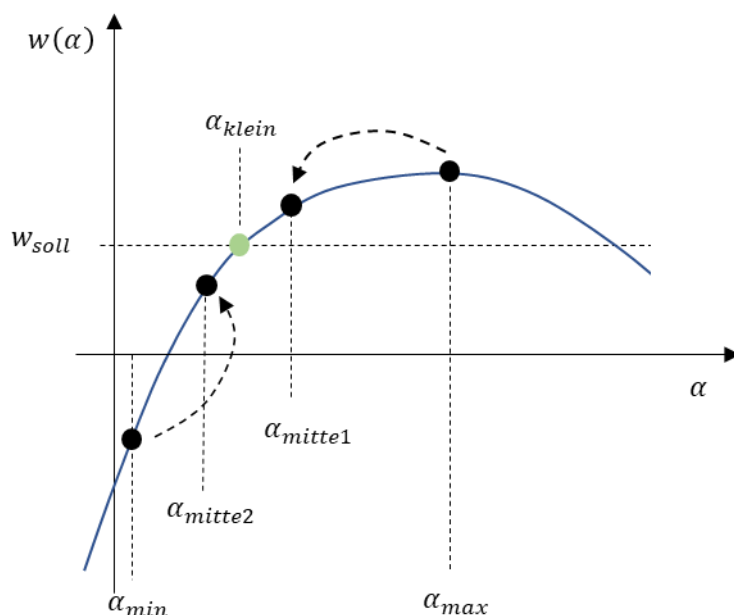


Abbildung 11: Berechnung der Winkel für vorgegebene Weite

Damit die verbleibende Intervallbreite (= Fehler des gesuchten Winkels) eine Schranke ε unterschreitet, braucht man

$$\text{ld} \left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{\varepsilon} \right)$$

Iterationen. Für den typischen Fall $h_0 = 0$, $\alpha_{\min} = 0^\circ$, $\alpha_{\max} = 30^\circ$ und $\varepsilon = 0,1^\circ$ sind das immerhin $\text{ld}(300) \approx 8,2$ – also aufgerundet 9 Iterationen. Dieser Wert ist unabhängig davon, wie gut ggf. der Startwert für den Winkel ist.

2.2.2 Oberflächenfunktionen: Modul „Arbeitsblatt“

Die Oberflächen-Funktionen beinhalten im Wesentlichen den Zugriff auf das EXCEL-Arbeitsblatt, also das Auslesen der vorgegebenen Parameter der Kurven und das Zurückschreiben der berechneten Parameter in das Arbeitsblatt.

Im EXCEL-File können sich beliebig viele Arbeitsblätter befinden, die aber alle denselben Aufbau entsprechend Abbildung 5 bis Abbildung 7 haben müssen. Alle Arbeitsblätter nutzen denselben VBA-Code und schreiben ihre Daten in eine globale Datenstruktur (Zweidimensionales Array von Objekten der Klasse ClassBaKu).

```
Private Const MAXSHEETS As Integer = 50#  
Private Const MAXBAKUPERSHEET As Integer = 6#  
Public BaKuSheets(MAXSHEETS, MAXBAKUPERSHEET) As ClassBaKu
```

Mit der auf jedem Arbeitsblatt befindlichen Taste „Alle aktiven Kurven berechnen“ werden die aktiven Kurven des Blattes berechnet und in den Array BaKuSheets(SheetNr, BaKuNr) geschrieben.

Jede der o.g. Member-Zugriffsfunktionen der Klasse ClassBaKu wird durch eine gleichnamige normale Funktion gekapselt, die dann in den Zellen des Arbeitsblattes aufgerufen werden kann.

3 Beispielberechnungen

3.1 Schiefer Wurf ohne Luftwiderstand

Das Programm sollte als erstes die Gleichungen des schiefen Wurfes ohne Luftwiderstand bestätigen. Wir berechnen das folgende Beispiel für verschiedene Werte von dt {0.1; 0.01; 0.001} und vergleichen mit der Formel

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \quad y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} t^2$$

Oder durch Auflösen und Einsetzen von $t(x)$:

$$y(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

Parameter	Variable	Einheit	dt=0.1	dt=0.01	dt=0.001	Sollwert
Anfangsgeschwindigkeit	v0	m/s	41,62			
Anfangswinkel	alpha	Grad	45			
Wurfweite	w	m	173,6358	176,2845	176,5494	176,5774
Steigzeit	ts	s	2,9000	2,9900	2,9990	3,0000
Fallzeit	tf	s	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
Gesamtzeit	tg	s	5,9000	5,9900	5,9990	6,0000
Scheitelpunkt -x	xs	m	85,3464	87,9951	88,2600	88,2887
Scheitelpunkt -y	ys	m	42,6728	43,9971	44,1296	44,1444
Winkel für maximale Wurfweite	alphamax	Grad	50,0000	45,5000	45,0000	45,0000
Maximale Wurfweite	wmax	m	173,8935	176,4898	176,5494	176,5774
Stützwerte in der Gesamtzeit (6 s)	N	1	60	600	6000	

Ein Vergleich der numerischen Werte der berechneten Parameter für die drei Schrittweiten dt mit den Sollwerten ergibt für $dt=0,001$ (=6000 Stützwerte im Beobachtungszeitraum) Abweichungen deutlich unter 1 %.

Die grafische Darstellung lässt für $dt=0,01$ und $dt=0,001$ keine Unterschiede zwischen der Sollkurve und den numerisch integrierten Werten erkennen.

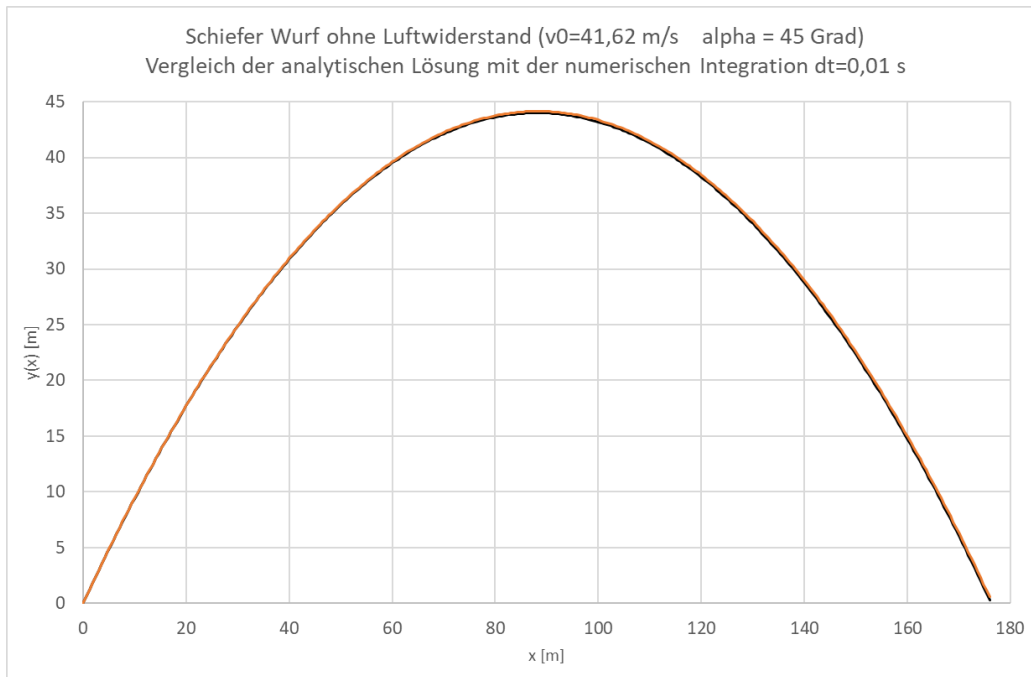


Abbildung 12: Schiefer Wurf ohne Luftwiderstand: Vergleich der analytischen Lösung mit der numerischen Integration

3.2 Senkrechter Schuss in die Luft

Im Abschnitt 1.4 wurden die Gleichungen (14) bis (18) für das Steigen und Fallen beim senkrechten Schuss nach oben berechnet.

Wir berechnen hier die Formeln für das dort genannte Zahlenbeispiel ($v_0=200$ m/s und $v_\infty=40$ m/s) und vergleichen sie mit den Ergebnissen der numerischen Integration ($dt=0,001$ s)

Parameter	Variable	Einheit	Numerische Integration $dt=0,001$	Analytische Lösung
Anfangs-Geschwindigkeit	v_0	m/s	200	
Grenz-Geschwindigkeit	v_∞	m/s	40	
Steigzeit	t_s	s	5,5980	5,6000
Fallzeit	t_f	s	9,4240	9,4307
Gesamtzeit	t_g	s	15,0220	15,0307
Scheitelpunkt -y	y_s	m	265,4890	265,6950

Bei allen berechneten Parametern liegt die Abweichung zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen unter 1 ‰.

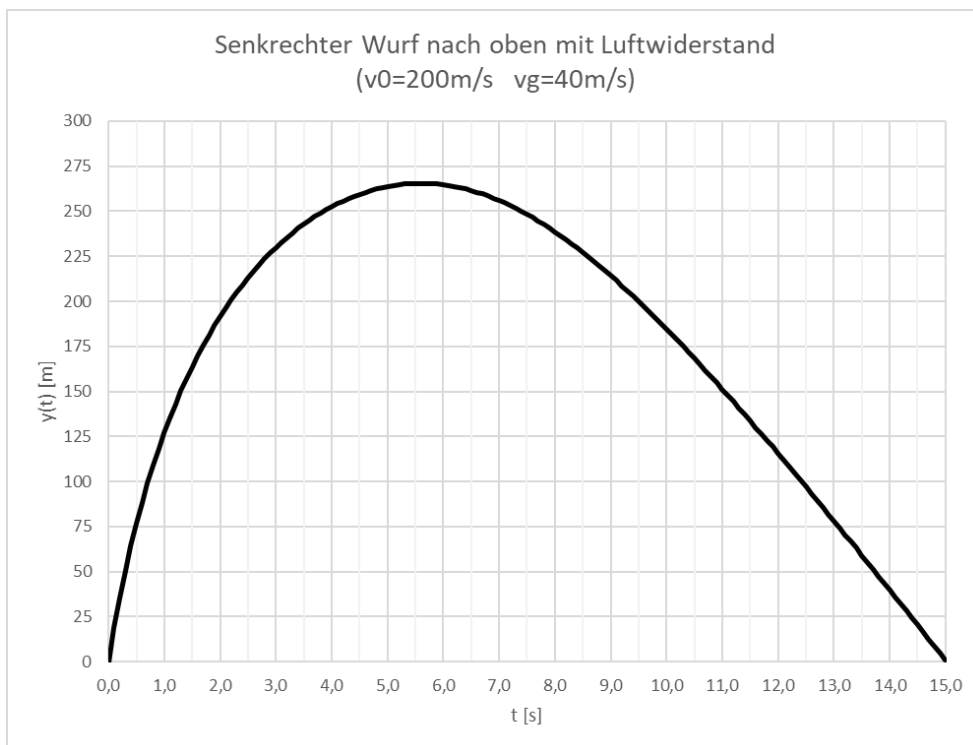


Abbildung 13: y - t -Diagramm für senkrechten Wurf nach oben mit Luftwiderstand (numerische Integration)

Sowohl die berechneten Parameter als auch die gesamte Kurve stimmen sehr gut mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen überein.

3.3 Beispiel mit Start- und Zielpunkt auf demselben Niveau

Um ein Gefühl für die typische Form der ballistischen Kurven zu bekommen, zeigen wir die Berechnungen zunächst an einem Beispiel, bei dem Start- und Endpunkt auf demselben Niveau liegen. Das Beispiel nimmt wieder Bezug auf Daten im Abschnitt 1.4.3, schießt die Kugel nun aber nicht senkrecht nach oben, sondern in verschiedenen Winkeln ab.

Körper: Stahlkugel (D=9mm, Dichte = 7,341 g/cm³, v₀=200 m/s, v_∞=40m/s)

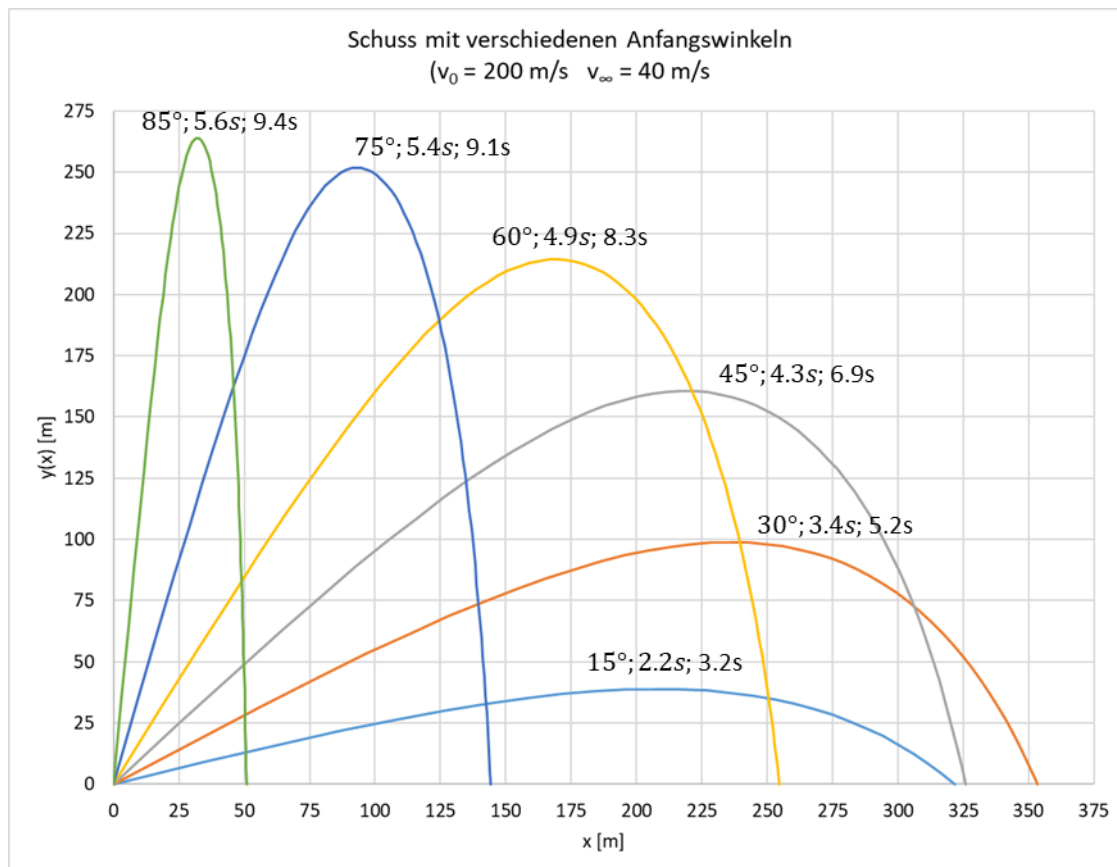


Abbildung 14; Ballistische Kurven $y(x)$ für verschieden Abwurfwinkel

Die Angaben an den Kurven bedeuten: Abschusswinkel, Steigzeit, Fallzeit.

Folgendes ist zu erkennen:

- Die Ballistischen Kurven unterscheiden sich in der Form deutlich von den Parabeln ohne Luftwiderstand. Wurfweite und die Wurfhöhe sind signifikant kürzer als bei der Parabel. Der aufsteigende Kurventeil ist glatter und länger als der abfallende Teil. Trotzdem wird der längere, aufsteigende Kurventeil wegen der hohen Anfangsgeschwindigkeit schneller durchlaufen als der abfallende Kurventeil.
- Je steiler der Abschuss, desto höher der Aufstieg und desto steiler der Winkel beim Auftreffen.
- Die Maximalweite wird bei einem Startwinkel von ca. 30° erreicht. Das hängt sowohl von v₀ als auch von v_∞ ab.
- Für den Abwurfwinkel von 15° stimmen die Ergebnisse genau mit der Näherung nach Lambert überein.

3.4 Abschlag eines Tennisballs von einer Pyramidenspitze

Für einen Werbespot soll ein Tennisspieler von der Spitze der Cheops-Pyramide einen Tennisball ($D=6,7$ cm, $m=59$ g) weit über die Grundlinie der Pyramide (Grundbreite =230 m, Höhe = 146 m) schlagen.

Kann er das schaffen, wenn seine Aufschlagsgeschwindigkeit 144km/h beträgt? Und wenn ja, welchen Abwurfwinkel muss er wählen?

Wir rechnen mit folgenden Zahlenwerten und ermitteln die Werte für drei Kurven:

Größe	Werte Parabel (ohne LW)	Ballistische Kurve 1	Ballistische Kurve 2
Dichte Luft	1,02 kg/m ³		
c_w -Beiwert Tennisball (Kugel)	0,45		
Durchmesser Tennisball	6,7 cm (wie vorgeschrieben)		
Masse Tennisball	58,3 g (wie vorgeschrieben)		
Anfangsgeschwindigkeit Tennisball	144 km/s = 40 m/s		
Abwurfhöhe	146 m		
Dichte Tennisball (berechnet)	0,370 kg/dm ³		
Ballistische Konstante k (berechnet)	0,0163 1/m		
Grenzgeschwindigkeit v_∞ (berechnet)	24,5 m/s		
Anfangswinkel α	30° = α_{\max}	30°	15° = α_{\max}
Wurfweite auf Niveau $y=0$	272	90 m	93
Wurfweite auf Niveau $y=H=146$ m	140	60 m	63

Die erste Kurve berechnen wir ohne Luftwiderstand und bekommen die typische Parabel. Den Winkel wählen wir zu 30°, was auch dem Winkel α_{\max} für eine maximale Wurfweite w_{\max} entspricht. (Der Winkel ist kleiner als 45°, da das Ziel tiefer liegt als der Abwurfort. Die maximale Weite beträgt 272 m. Nun ist aber jedem Tennisspieler klar, dass man einen Tennisball niemals über 270 m weit schlagen kann.

Zum Vergleich wurde die ballistische Kurve mit demselben Anfangswinkel von 30° berechnet. Anfänglich verlaufen die Flugbahnen ohne und mit Luftwiderstand gleich, dann verringert der Luftwiderstand die x-Komponente der Geschwindigkeit und der Tennisball kommt nicht mehr vorwärts. Gleichzeitig wird er von der Schwerkraft nach unten beschleunigt, bis er die Grenzgeschwindigkeit von $v_\infty = 24,5$ m/s erreicht hat. Diese Geschwindigkeit ist aber hauptsächlich nach unten gerichtet.

Der Tennisball kann bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 40 m/s nicht über die Grundlinie der Pyramide hinausfliegen; er fliegt nur 90 m weit.

Es ist interessant, dass der Winkel α_{\max} , der die maximale Wurfweite ergibt, für die Kurve mit Luftwiderstand nur 15° beträgt und damit deutlich geringer ist als α_{\max} für die Parabel. Aber auch der Abschlag mit 15° bringt lediglich 3 m Weitengewinn.

Lässt man noch den Höhenunterschied von 146 m außer Acht, dann könnte der Tennisspieler den Ball lediglich 60 m weit schlagen. Das scheint durchaus realistisch zu sein.

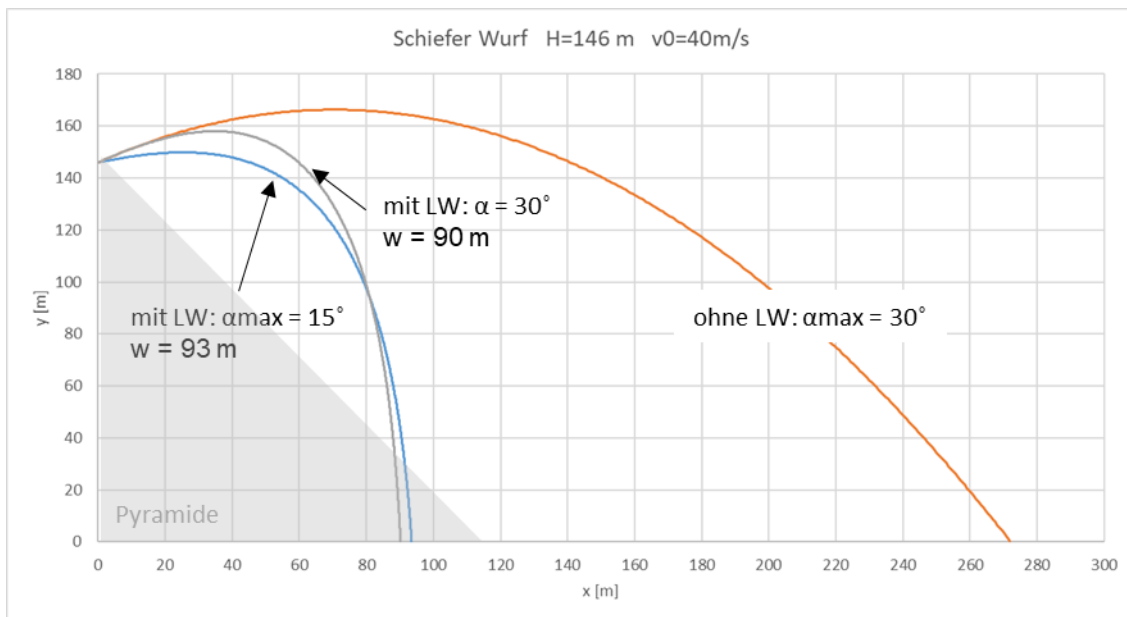


Abbildung 15: Wurf von der Pyramidenspitze mit und ohne Luftwiderstand (=LW)

3.5 Schuss auf ein verdecktes, tieferliegendes Ziel

Ein Schuss soll ein 400 Meter tieferliegendes Ziel treffen, muss dabei aber einen 800 Meter hohen Felsen überwinden, den der Gegner zur Deckung nutzt.

Folgende Daten geben wir ein:

Vorgaben	Variable	Einheit	Werte Kurve 1	Werte Kurve 2	Werte Kurve 3	Werte Kurve 4
Kurve aktiv? (1=ja, 0=nein)	akt		1	1	1	1
Barometrische Höhenformel benutzen?	bar		0	0	0	0
Erdbeschleunigung	g	m/s ²	9,8100	9,8100	9,8100	9,8100
Dichte Medium (Luft, Höhe NN)	rho	kg/m ³	1,2040	1,2040	1,2040	1,2040
cw-Beiwert	cw	1	0,4500	0,4500	0,4500	0,4500
Durchmesser	D	m ²	0,0600	0,0600	0,0600	0,0600
Wirkfläche	A	m ²	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028
Masse	m	kg	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Abwurfhöhe	h0	m	400,0000	400,00	400,00	-400,00
Abwurfgeschwindigkeit	v0	m/s	250,0000	250,000	250,000	250,000
Abwurfwinkel	alpha	Grad	45,0000	65,9400	-7,5600	76,0000
Schrittweite Zeit bei Integration	dt	s	0,0050	0,0050	0,0010	0,0050
Berechnete Vorgaben						
Ballistische Konstante (Höhe NN)	k	1/m	0,00077	0,00077	0,00077	0,00077
Grenzgeschwindigkeit	vg	m/s	113,170	113,170	113,170	113,170
Berechnete Parameter						
Wurfweite	w	m	1774,40	1199,86	1200,69	681,25
Steigzeit	ts	s	9,81	12,09	0,00	12,80
Fallzeit	tf	s	17,22	20,18	8,11	13,08
Gesamtzeit	tg	s	27,03	32,27	8,11	25,88
Scheitelpunkt -x	xs	m	1011,75	686,16	0,00	427,92
Scheitelpunkt -y	ys	m	1053,23	1389,27	400,00	696,19
Kurvenlänge	s	m	2625,30	2793,09	1278,56	1973,04
Winkel für maximale Wurfweite	alphamax	Grad	29,53	29,53	24,23	44,03

Vorgaben	Variable	Einheit	Werte Kurve 1	Werte Kurve 2	Werte Kurve 3	Werte Kurve 4
Maximale Wurfweite	wmax	m	1903,64	1903,64	1889,91	1449,17
Anzahl berechneter Punkte	pktanz		5408	6456	8108	5178
Vorgabe Weite (optional)	wsoll	m	1200,0000	0,0000	0,00	0,0000
Kleiner Winkel	alphakl	Grad	-7,56	0,00	0,00	0,00
Großer Winkel	alphagr	Grad	65,93	0,00	0,00	0,00

Für Kurve 1 wählen wir einen beliebigen Winkel; sie dient uns nur dazu, die beiden Winkel zu berechnen, unter denen der Schuss das Ziel treffen kann. Sie betragen $-7,56^\circ$ (direkter Schuss) und $65,93^\circ$ (indirekter Schuss)

In den Kurven 2 und 3 tragen wir dann diese Winkel ein, um die Kurven im Diagramm darstellen zu können.

Zwei mögliche Winkel für einen Schuss auf ein tieferliegendes Ziel vorgegebener Entfernung

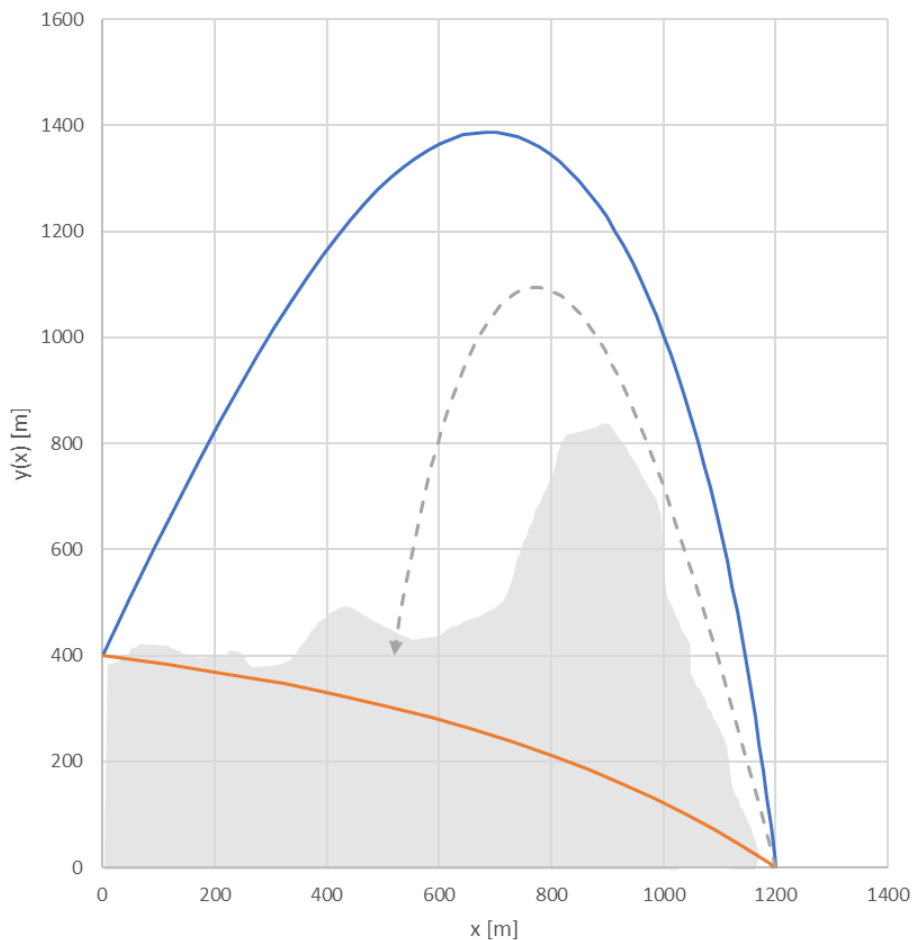


Abbildung 16: Treffen eines tieferliegenden Zieles unter zwei Winkeln

In der Abbildung 16 sieht man die beiden Winkel, unter denen das tieferliegende Ziel gerade getroffen wird. Der negative Winkel scheidet wegen der vorhandenen Deckung aus. Der indirekte Schuss kann die Deckung überwinden und das Ziel treffen.

Könnte der tieferliegende Gegner mit derselben Waffe (v_0, k) seinerseits den höhergelegenen Gegner treffen? Man vermutet sofort, dass das nicht geht, denn er müsste dabei deutlich steiler schießen. Aus der Abbildung erkennt man, dass er – um den steilen Hang direkt vor ihm zu überwinden – mit einem Winkel von

$$\alpha > \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{800 \text{ m}}{200 \text{ m}}\right) \approx 76^\circ$$

schießen müsste. Das Programm berechnet, dass er mit diesem Winkel zwar den steilen Berg überwinden, aber dann auf Höhe 400 m nur ca. 680 m weit schießen kann.

Dazu wird Kurve 4 verwendet, die eine Abschusshöhe von -400 m und den Winkel von 76° bekommt. Sie wird zudem in x-Richtung um 1200 m verschoben und gespiegelt.

3.6 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme

Wir berechnen die Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme für die folgende Aufgabe:

Vorgaben	Variable	Einheit	Werte Kurve 1
Dichte Medium (Luft)	rho	kg/m ³	1,2041
cw-Beiwert	cw	1	0,4500
Durchmesser Kugel	D	m	0,0670
Wirkfläche	A	m ²	0,0035
Masse	m	kg	0,0580
Abwurfhöhe	h0	m	300,0000
Abwurfgeschwindigkeit	v0	m/s	100,0000
Abwurfwinkel	alpha	Grad	45,0000
Schrittweite Zeit bei Integration	dt	s	0,0100
Ballistische Konstante	k	1/m	0,0165
Grenzgeschwindigkeit	vg	m/s	24,4065
Berechnete Parameter			
Wurfweite	w	m	122,6887
Steigzeit	ts	s	2,5000
Fallzeit	tf	s	16,2900
Gesamtzeit	tg	s	18,7900
Scheitelpunkt -x	xs	m	72,0967
Scheitelpunkt -y	ys	m	351,3582
Winkel für maximalewurfweite	alphamax	Grad	10,8964
Maximale Wurfweite	wmax	m	148,2701

In der Abbildung 17 wurden die v-t-Diagramme des o.g. Wurfes dargestellt. Wegen des Abwurfwinkels von 45 ° beginnen sowohl v_x als auch v_y bei

$$v_x(0) = v_0 \cdot \cos(45^\circ) = v_y(0) = v_0 \cdot \sin(45^\circ) = \frac{v_0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 70,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die x-Geschwindigkeit geht asymptotisch gegen 0, weil mit dem Luftwiderstand in Richtung x ausschließlich eine Bremskraft vorhanden ist. Die y-Geschwindigkeit strebt gegen die negative Grenzgeschwindigkeit v_∞, bei der sich Schwerkraft und Luftwiderstand gerade aufheben. Im Scheitelpunkt (t=2,5 s) ist die y-Komponente der Geschwindigkeit = 0.

Die Gesamtgeschwindigkeit durchläuft ein Minimum, das aber **nicht** im Scheitelpunkt erreicht wird, sondern erst später.

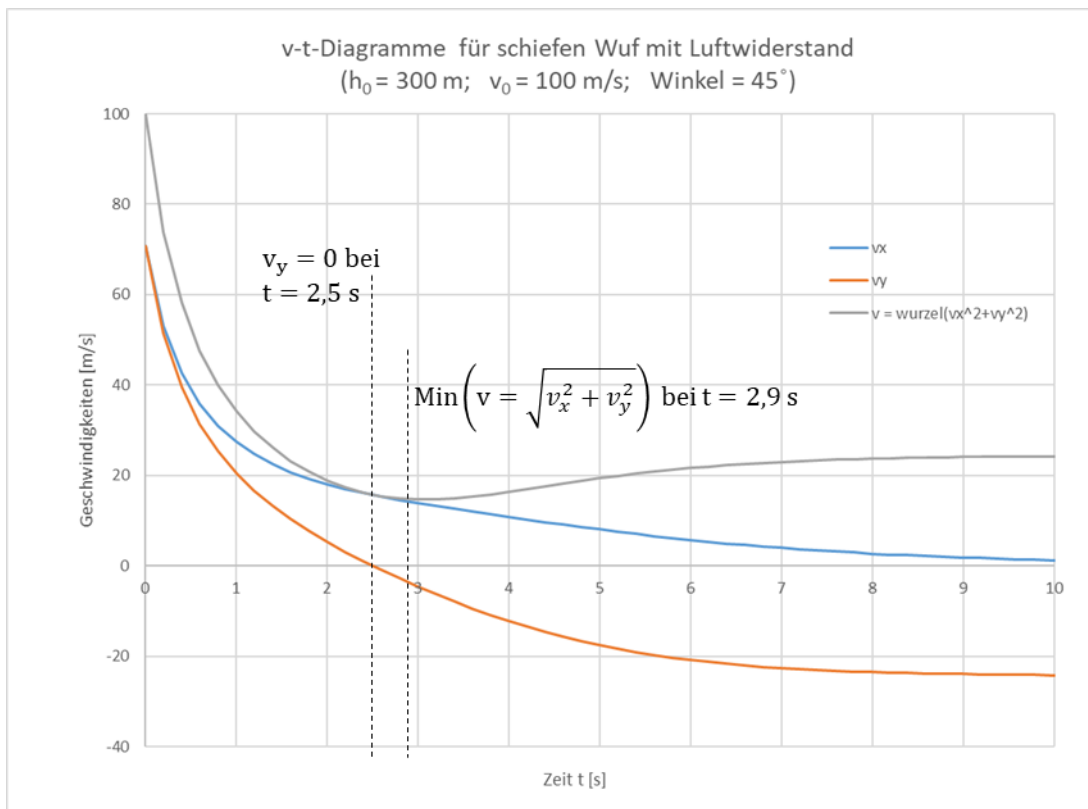


Abbildung 17: v-t-Diagramme

3.7 Berechnung der Winkel bei Vorgabe der Weite

Wir legen ein Arbeitsblatt an mit zwei Kurven, die sich ausschließlich in den Anfangsgeschwindigkeiten unterscheiden. Danach wird die x-Achse als Weitenachse in sinnvollen Schritten (hier 50 m) bis zur maximal erzielbaren Weite angelegt. Über die Worksheet-Funktionen

=AlphaKlein(<Zelle mit Weite>;2;1)

=AlphaGross(<Zelle mit Weite>;2;1)

für die Winkel werden diese zu jeder Weite berechnet. Wegen der dafür notwendigen Iterationen dauert die Berechnung ca. 7 Sekunden.

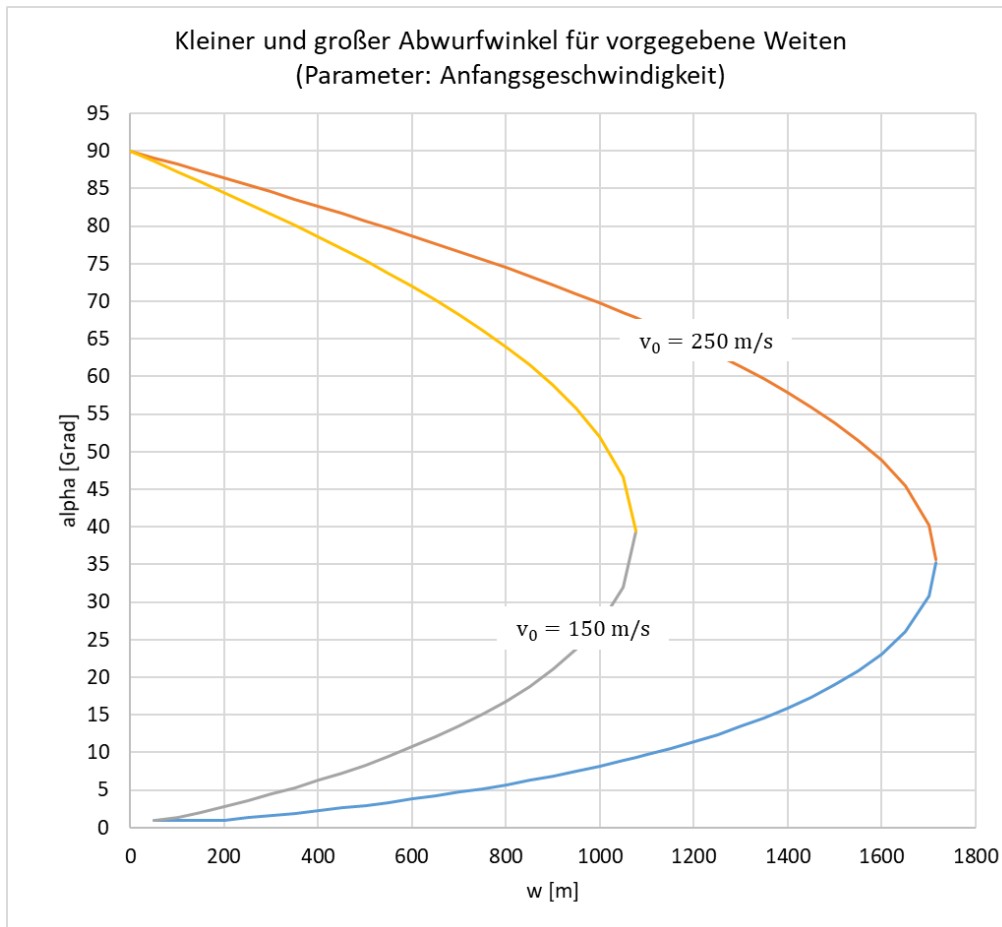


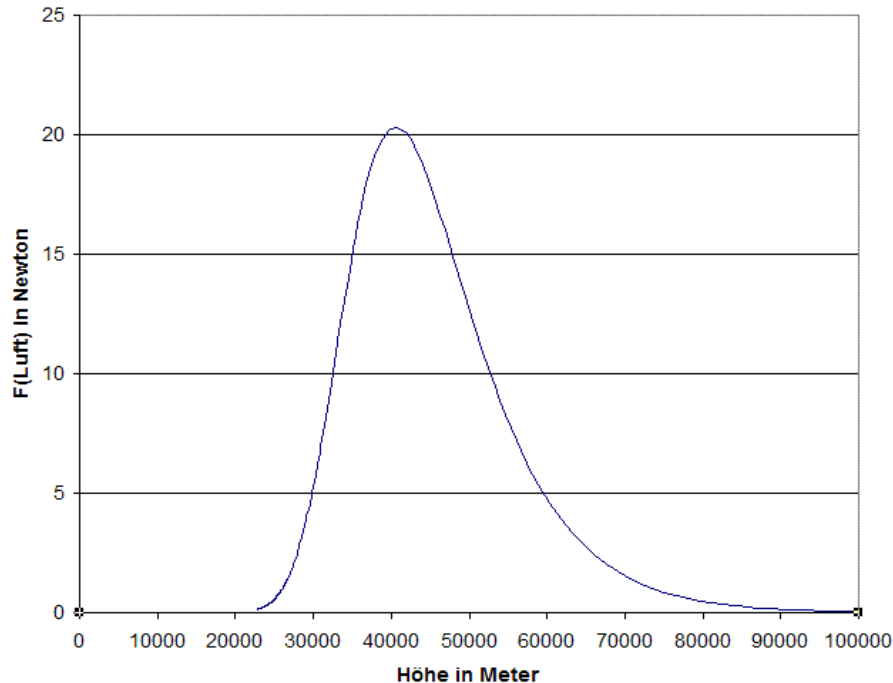
Abbildung 18: Berechnung der Winkel bei Vorgabe der Weite (Parameter: Anfangsgeschwindigkeit)

Wenn man bei einer vorgegebenden Weite von z.B. 1400 Meter ein Ziel treffen möchte ($v_0=250$ m/s), dann ist das entweder mit 15° oder mit 67° möglich.

3.8 Beschleunigungsberechnung am Beispiel eines Meteors

Wir beziehen uns auf ein Beispiel auf Wiki: <https://de.wikipedia.org/wiki/Vergl%C3%BChen>

Dort werden für einen kleinen 4g-Meteor, der mit 20-80 km/s in die Atmosphäre einfliegt, folgende Kräfte berechnet.



Leider sind die genaue Anfluggeschwindigkeit sowie die Einfugrichtung (radial?) nicht genannt.

BEACHTEN: Das Diagramm startet für $t=0$ bei Höhe = 100 km, ist also zeitlich gesehen von rechts nach links zu lesen)

Um die Ergebnisse in unserem Programm nachvollziehen zu können, müssen wir im EXCEL-Arbeitsblatt das entsprechende Flag „Barometrische Höhenformel benutzen?“ auf 1 setzen.

Wir geben folgende Werte ein:

Vorgaben	Variable	Einheit	Werte
Dichte Medium (Luft, Erdoberfläche) Verwendung der barometrischen Höhenformel	rho	kg/m ³	1,2040
Dichte Körper	rho-k	kg/m ³	7600,0000
cw-Beiwert (Kugel)	cw	1	0,4500
Durchmesser Kugel	D	m ²	0,0100
Wirkfläche	A	m ²	0,000079
Masse	m	kg	0,003979
Abwurfhöhe	h0	m	120.000

Vorgaben	Variable	Einheit	Werte
Abwurfgeschwindigkeit	v0	m/s	50.000
Abwurfwinkel (radial nach unten)	alpha	Grad	-90
Schrittweite Zeit bei Integration	dt	s	0,0050
Berechnete Vorgaben			
Ballistische Konstante k_0	k	1/m	0,00535
Grenzgeschwindigkeit	vg	m/s	42,8343

Die folgende Abbildung zeigt die Ergebnisse für die Kraft $F_y = m \cdot a_y$ auf den Meteor in y-Richtung.

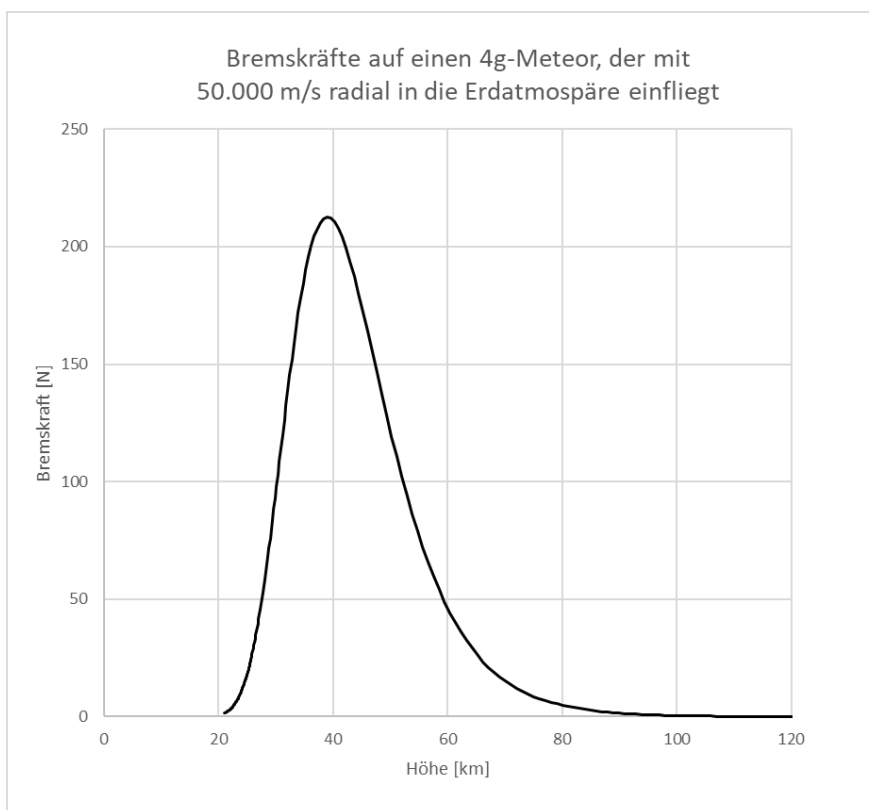


Abbildung 19: Bremskräfte auf einen Meteor von 4g

BEACHTEN: Die Kurve ist von rechts nach links zu lesen $y(t=0)=120$ km

Von der Form her stimmt die Kurve sehr genau mit den Angaben in Wiki überein. Das Maximum der Beschleunigung wird in einer Höhe von 40 km erreicht. Allerdings sind die von uns ermittelten Kraftwerte durchgehend um den Faktor 10 größer. (Die Klärung dazu mit dem Autor des Wiki-Beitrages läuft noch)

Wir drehen die Achsenorientierung der y-Achse um:

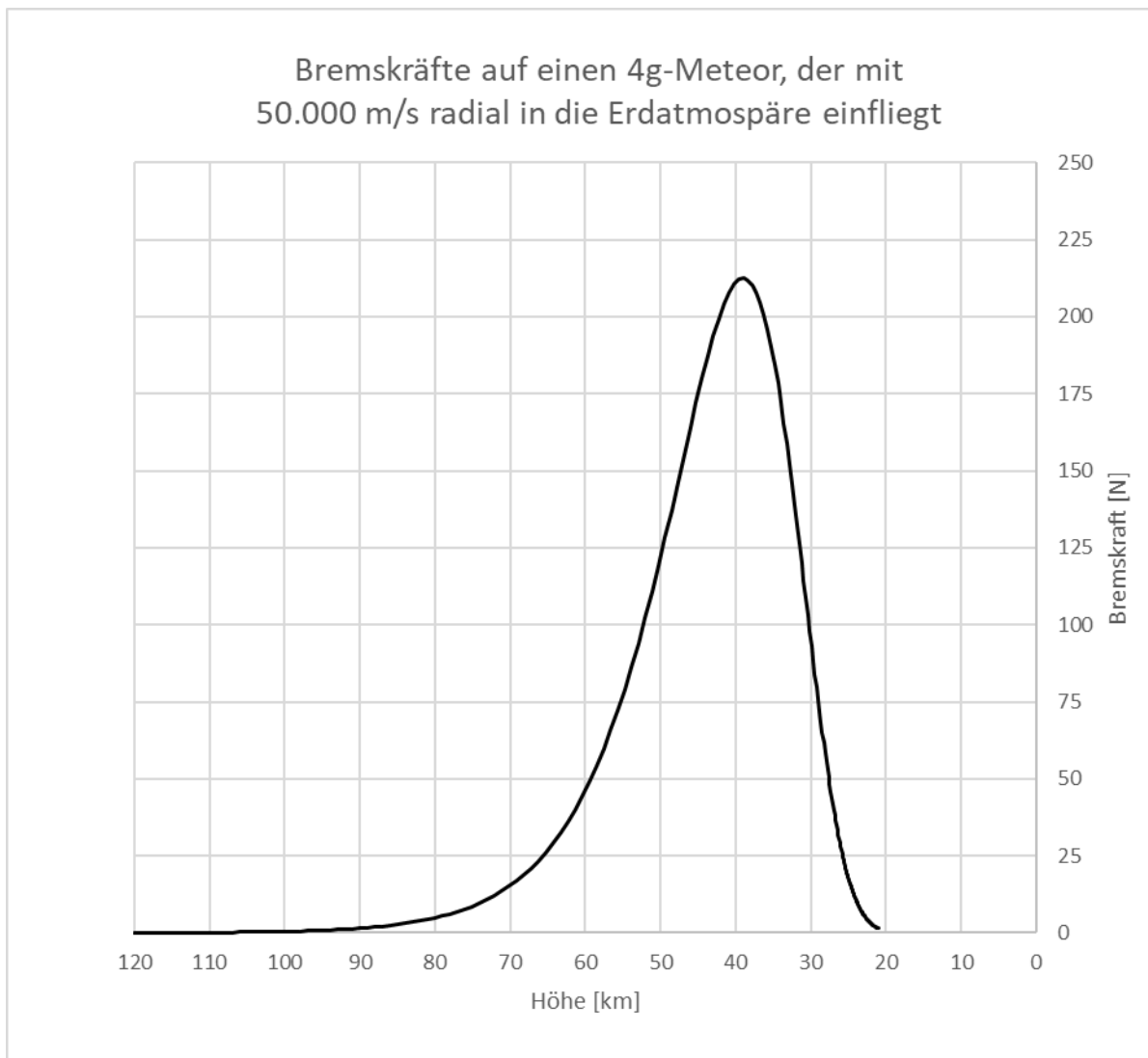


Abbildung 20: Bremskräfte auf einen 4g-Meteor

Auf Grund der geringen Dichte in großer Höhe steigt die Bremskraft erst in tieferen Schichten stark an. Sie erreicht in einer Höhe von ca. 40 km Maximalwerte um die 212 N.

Danach nimmt die Kraft schnell wieder ab – der Körper erreicht seine Grenzgeschwindigkeit. (Der Bereich $y < 20$ km wurde nicht berechnet).

Eine maximale Bremskraft von 212 N ergibt bei einer Masse von nur 4 g eine maximale Beschleunigung von

$$a = \frac{F}{m} = \frac{212}{4} \cdot \frac{\text{N}}{\text{g}} = \frac{220}{0,004} \cdot \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 53 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{53 \cdot 10^3}{9,81} \cdot \left(9,81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 5402 \cdot g$$

Die maximale Beschleunigung (Bremswirkung) ist über 5000 Mal so groß, wie die Erdbeschleunigung!

Da diese Beschleunigungen sehr hoch scheinen, berechnen wir zur Kontrolle die Bremskraft, die der Körper in 40 km Höhe (Luftdichte nach der barometrischen Höhenformel) bei seiner vollen Geschwindigkeit von 50.000 m/s hätte:

$$F = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho(y)}{2} \cdot v^2 \quad \rho(y) = \rho_0 \cdot e^{-By} \quad B = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g = 1,16 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}}$$

$$F = \frac{0,45 \cdot 0,000079 \cdot 0,00115}{2} \cdot 50.000^2 \text{N} = 488 \text{N}$$

Dass die von uns berechnete Kraft kleiner als 488 N ist, ist klar, denn auch die dünne Atmosphäre bremst den extrem schnellen Körper ab. Tatsächlich beträgt seine Geschwindigkeit in dieser Höhe nur noch 34.000 m/s. Das ergibt im Überschlag die Kraft

$$F = \frac{0,45 \cdot 0,000079 \cdot 0,00115}{2} \cdot 34.000^2 \text{N} = 226 \text{N}$$

Das bestätigt unser Ergebnis noch einmal.

Kann der Meteor tatsächlich auf der Erde „einschlagen“?

Wir betrachten die Energie, die durch die Bremskraft aufgebracht wird. Diese ist gleich dem Integral unter der Kraft-Weg-Kurve:

$$W = - \int_{y_1}^{y_2} F(y) \cdot dy = -m \cdot \int_{y_1}^{y_2} a(y) \cdot dy = -m \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{dv_y}{dt} \cdot dy = -m \cdot \int_{v_1(y_1)}^{v_2(y_2)} v(y) \cdot dv$$

$$W = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2) \approx \frac{m}{2} \cdot v_1^2$$

Da die Geschwindigkeit v_2 nach dem starken Abbremsvorgang gegenüber der Anfluggeschwindigkeit $v_1 = 50 \text{ km/s}$ zu vernachlässigen ist, kann man grob davon ausgehen, dass die gesamte kinetische Energie des Meteors in Reibungswärme umgewandelt wird.

$$W = \frac{m}{2} v^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 5 \cdot 10^6 \text{ J}$$

(Wenn man einfach die ca. 20 Rechtecke von 25 N* 10km unter der Kurve von Abbildung 20 zusammenzählt, kommt man auf dasselbe.)

Nun ist die Frage, welcher Teil der Wärmeenergie den Flugkörper erhitzt und welcher an die Atmosphäre abgegeben wird.

Wenn wir annehmen, dass der Meteor nur 10% der Energie abbekommt, dann würde er sich damit auf folgende Temperatur erhitzen ($c = 0,5 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} = 0,5 \text{ J/g} \cdot \text{K}$)

$$\Delta\vartheta = \frac{10\% \cdot W}{c \cdot m} = \frac{5 \cdot 10^5}{0,5 \cdot 4} \text{K} = 2,5 \cdot 10^5 \cdot \text{K}$$

Der Meteor würde damit restlos verdampfen.

4 Literatur

[Willerding] eBook „Die mathematische Theorie ballistischer Kurven“

<https://www.eugen-willerding.de/>

[Wiki] Verglühen: <https://de.wikipedia.org/wiki/Vergl%C3%BChen>