# Permutationen mit Fixpunkten und ohne Fixpunkte

Dr. Ulrich Mende

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorbemerkungen

Der Begriff der Permutationen gehört zu den Grundlagen der Kombinatorik. Permutationen sind Vertauschungen in der Reihenfolge von Objekten, ohne dass deren Anzahl dabei geändert würde.

Hier geht es um eine bestimmte Eigenschaft von Permutationen, nämlich darum, ob bei den Vertauschungen alle Objekte ihren Platz in der Reihenfolge ändern, oder ob einige an ihrem Platz bleiben. Diejenigen Plätze in der Reihenfolge, auf denen das Objekt bei der Vertauschung (der anderen Objekte) stehen bleibt, nennt man „Fixpunkte“ der Permutationen. Wie bekannt können n Objekte n! unterschiedliche Permutationen haben. Unter diesen befinden sich solche ohne Fixpunkte( = fixpunktfreie Permutationen), solche mit einem Fixpunkt mit zwei Fixpunkten usw. und auch eine Permutation (die initiale), die genau n Fixpunkte hat, bei der also gar nichts vertauscht wurde.

In der Literatur zu diesem Thema tritt der Begriff „Derangement“ (deutsch: Störung) auf. In diesem Sinne wäre eine fixpunktfreie Permutation ein vollständiges Derangement. Nicht fixpunktfreie Permutationen werden dann als partielle Derangements bezeichnet.

**Typische Aufgabenstellungen:**

6 Ehepaare besuchen einen Tanzkurs. Es wird beschlossen, dass die Paare stets gemischt werden, dass also Ehepartner nie miteinander tanzen sollen. Wie viele Möglichkeiten der Paar-Kombination gibt es dazu? (Das ist die Frage nach der Anzahl der fixpunktfreien Permutationen für n=8.)

Ein Patient scheint farbenblind zu sein, will das aber nicht wahrhaben. Als Test soll er 8 verschiedenfarbige Kugeln in 8 entsprechend gefärbte Kästen einsortieren. Er erreicht dabei 5 richtige Zuordnungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses Ergebnis ein Zufall? (Diese Frage kann mit der Verteilung der Fixpunkt-Anzahl gelöst werden).

# 2 Fixpunktfreie Permutationen, Subfakultäten

## 2.1 Zurückführung auf Mengenoperationen

Wir betrachten n unterschiedliche Elemente, die insgesamt in n! Permutationen angeordnet werden können. Da wir Permutationen zählen und gruppieren werden, ist der Ereignisraum Ω(n) die Menge aller n! Permutationen.

Wir erklären im Folgenden die Zusammenhänge für n=4.

Ω(4)={ 1234,1243,1324,1342,1423,1432, 2134,2143,2314,2341,2413,2431,

3124,3142,3214,3241,3412, 3421, 4123,4132,4213,4231,4312,4321}

|Ω(4)|=4!=24

Wir definieren n Mengen $A_i$ so, dass sie jeweils alle diejenigen Permutationen enthalten, bei denen das i-te Element fix ist.

BEACHTE:
Das bedeutet nicht, dass in den Permutationen neben dem explizit fixierten Element nicht weitere Elemente fix sein können. $A_2$ heißt demnach *nicht*, dass die in dieser Menge enthaltenen Permutationen genau 2 Fixpunkte haben, sondern dass mindestens das Element 2 fix geblieben ist!

$A_1$={1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432} alle Permutationen mit Fixelement 1

$A_2$={1234, 1243, 3214, 3241, 4213, 4231} alle Permutationen mit Fixelement 2

$A_3$={1234, 1432, 2134, 2431, 4132, 4231} alle Permutationen mit Fixelement 3

$A_4$={1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214} alle Permutationen mit Fixelement 4

$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=6$

Das jeweils namensgebende Fixelement ist in allen Permutationen rot gekennzeichnet. Daneben gibt es aber in den meisten Permutationen noch weitere Fixelemente. Diese wurden grau gekennzeichnet. Das bedeutet, dass die definierten Mengen nicht disjunkt sind. Die zur Trägermenge Ω fehlenden Permutationen sind gerade die, die keinerlei Fixelemente haben.

Mit ein wenig Mühe kann man die 9 fixpunktfreien Permutationen für n=4 manuell ermitteln:

$A_{frei} = \{2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321\}$ $|A_{frei}|=9$

Ziel ist es nun, aus den Mengen $A_i$ die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen zu berechnen. Wir wissen, dass in den Mengen $A_i$ alle Permutationen enthalten sind, die wenigstens ein Fixelement haben. Allerdings sind die Permutationen – wie man sich leicht überzeugt – in den Mengen mehrfach enthalten. Die Mächtigkeit der echten Vereinigungsmenge der $A_i$, in der keine Elemente doppelt gezählt werden, gibt uns daher die Menge aller Fix-Permutationen.

Nach dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten bzw. Mächtigkeiten von Mengen [Mende] lässt sich die Mächtigkeit einer Vereinigungsmenge über alle möglichen Kombinationen von Mengendurchschnitten berechnen. Im Fall n=4 sieht das so aus:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \cdot S_k$$

$$S_1 = +(|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|)$$
$$S_2 = -(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)$$
$$S_3 = +(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$$
$$S_4 = -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$S_1$ erfasst alle Selbst-Durchschnitte, $S_2$ alle 2er-Duchschnitte, $S_3$ alle 3-er Durchschnitte und $S_4$ den einzig möglichen 4-er Durchschnitt.

## 2.2 Berechnung der k-fachen Durchschnittsmengen

**Berechnung der Selbst-Durchschnitte $S_1$ (k=1)**

$S_1$ wird aus den 4 gleichgroßen Mengen $A_1..A_4$ gebildet. In jeder Menge wird genau ein Element aus n=4 Elementen ausgewählt. Die restlichen (n-k) = 3 Elemente werden frei permutiert. Das gibt:

$$S_1 = \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!} = 4! = 24$$

**Berechnung der Zweifach-Durchschnitte $S_2$ (k=2)**

Hier müssen wir die paarweisen Durchschnitte bilden:

$$\begin{aligned} S_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &= |\{1234, 1243\}| + |\{1234, 1432\}| + |\{1234, 1324\}| + |\{1234, 1324\}| + |\{1234, 3214\}| \\ &\quad + |\{1234, 2134\}| \\ &= 6 \cdot 2 = 12 \end{aligned}$$

Es gibt allgemein $\binom{n}{k}$ solche Paarungen, in diesem Fall also $\binom{4}{2} = 6$. In jeder Paarung werden genau 2 Elemente, die gerade den Indexwerten der geschnittenen Mengen entsprechen, festgehalten. Die anderen (n-k)=2 Elemente können frei permutieren, wofür es (n-k)! Möglichkeiten gibt.

Also gilt auch für k=2 dieselbe Formel, die nun aber andere Werte als bei k=1 liefert:

$$S_2 = \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

**Berechnung der Dreifach-Durchschnitte $S_3$ (k=3)**

Jetzt müssen alle 3er-Durchschnitte gebildet werden, bei denen jeweils k=3 Elemente aus n=4 Elementen ausgewählt und festgehalten werden.

$$\begin{aligned} S_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= |\{1234\}| + |\{1234\}| + |\{1234\}| + |\{1234\}| = 4 \end{aligned}$$

Dafür gibt es wieder $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, Das restliche Element kann „frei" permutieren, hat aber nur eine Möglichkeit: (n-k)!=1!=1.

Also gilt auch hier:

$$S_3 = \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

Dass die 3er-Durchschnitte alle gleich sind, ist klar, denn wenn man 3 Elemente von n=4 Elementen festhält, dann ist auch das 4. Element automatisch fix. Und das bedeutet bei n=4 alle Elemente sind fix.

**Berechnung der Vierfach-Durchschnitte $S_4$ (k=4)**

Hier ist nur ein Durchschnitt möglich:

$$S_4 = |\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_4| = |\{1234\}| = 1$$

Auch hier gilt die allgemeine Formel:

$$S_4 = \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

Mit den Summen $S_1$ bis $S_4$ berechnen wir die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge so:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 24 - 12 + 4 - 1 = 15$$

Das stimmt mit der Anzahl der vorher bereits ermittelten 9 freien Permutationen überein, da sich zusammen gerade 24 = 4! Permutationen ergeben.

## 2.3 Verallgemeinerung

Die Summe $S_k$ gilt für jedes n>1 und jedes k   1<=k<=n:

| | |
|---|---|
| $S_k = \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$ | 1 |

Damit wird die absolute Gesamtanzahl von Permutationen mit mindestens einem Fixpunkt unter allen n! Permutationen der n Elemente:

$$f_n = \left|\bigcup_{i=1}^{n} Ai\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \cdot \frac{n!}{k!} = n! \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k!}$$

Die Zahl der fixpunktfreien Permutationen, die meist mit $d_n$ bezeichnet wird, ist dann:

$$d_n = !n = n! - f_n = n! \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k!}\right) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad (2)$$

Diese Anzahl $d_n$ der fixpunktfreien Permutationen wird auch als **Subfakultät** !n bezeichnet. [WiKi Subfakultät]

Für die Wahrscheinlichkeit von P(n) fixpunktfreier Permutationen muss man einfach durch die Gesamtanzahl der n! Permutationen dividieren:

$$P(n) = \frac{!n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (3)$$

Nun benutzen wir die Reihenentwicklung der e-Funktion für x=-1

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots$$

und bekommen einen Grenzwert für $p_n$:

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \frac{1}{e} \qquad (4)$$

Hier einige Werte von !n, n! sowie P(n) und 1/e im Vergleich.

| n Elemente-Anzahl | !n = $d_n$ Subfakultät = Anzahl Permutationen ohne Fixpunkt | n! Fakultät | P(n) Wahrscheinlichkeit für Permutationen ohne Fixpunkte | \|P(n)-1/e\| Abweichung vom Grenzwert 1/e=0,367.879 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1,000.000 |
| 2 | 1 | 2 | 0,500.000 | 0,132.121 |
| 3 | 2 | 6 | 0,333.333 | 0,034.546 |
| 4 | 9 | 24 | 0,375.000 | 0,007.201 |
| 5 | 44 | 120 | 0,366.666 | 0,001.213 |
| 6 | 265 | 720 | 0,368.055 | 0,000.176 |
| 7 | 1.854 | 5.040 | 0,367.857 | 0,000.022 |
| 8 | 14.833 | 40.320 | 0,367.881 | 0,000,002 |
| 9 | 133.496 | 362.880 | 0,367.879 | 0.000.000 |
| 10 | 1.334.961 | 3.628.800 | 0,367.879 | 0,000.000 |

## 3 Rekursive Berechnungsformel der Subfakultät

Ähnlich wie bei der normalen Fakultät oder den Binomialkoeffizienten gibt es auch bei den Subfakultäten rekursive Berechnungsformeln. (Aus Gründen der besseren Lesbarkeit schreiben wir für !n im Folgenden SF(n))

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{SF}(n) = (n-1) \cdot \big(\mathrm{SF}(n-1) + \mathrm{SF}(n-2)\big)$ | $\mathrm{SF}(n) = n \cdot \mathrm{SF}(n-1) + (-1)^n$ | 5 |

Die zweite Rekursionsformel kann man aus der ersten ableiten, wir zeigen hier deshalb nur, wie man auf die erste Formel kommt.

Die ersten Werte für n=2,3 und 4 lassen sich manuell ableiten:

- n=2: SF(2)=1, 12 → 21.
- n=3: SF(3)=2, 123 → {231,312}
- n=4: SF(4)=9: 1234 → {2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321}

Wir leiten die erste Rekursionsformel am Beispiel SF(5) ab.

Dazu betrachten wir zunächst nur die Ziffer 1. Um Fixpunkt-Freiheit zu erreichen, muss sie auf einen anderen Platz verschoben werden, von denen es (n-1) gibt; im Beispielfall (5-1)=4. Zunächst betrachten wir die Verschiebung der 1 auf den Platz der 2 und ermitteln dazu alle möglichen fixpunktfreien Permutationen. Für die von der 1 verdrängte 2 gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Sie tauscht mit der 1 ihre Position. In diesem Fall können die 3, die 4 und die 5 gerade SF(3)=2 fixpunktfreie Permutationen bilden.
2. Wenn die 2 nicht mit der 1 tauschen soll, so kann sie zusammen mit der 3,4,5 gerade SF(4) fixpunktfreie Permutationen bilden. Der Ausgangspunkt für diese Permutationen ist eine beliebige Permutation aus Fall 1 (z.B. 2-1-5-3-4), was vielleicht verwundern wird. Es stellt aber sicher, dass die 2 bei den im Folgenden zu ermittelnden fixpunktfreien Permutationen nicht mehr auf Platz 1 stehen darf. Dieser Fall wurde ja bereits unter 1) gezählt.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ausgangspermutation = Positionen |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 5 | 3 | SF(n-2)=SF(5-2)=SF(3)=2<br>(die steht auf Position 1) |
| 2 | 1 | 5 | 3 | 4 | |
| | | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | SF(n-1)=SF(5-1)=SF(4)=9<br>(die 2 steht nicht auf Position 1) |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 3 | |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 4 | |
| 4 | 1 | 5 | 2 | 3 | |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | |
| 3 | 1 | 5 | 2 | 4 | |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 2 | |
| 5 | 1 | 4 | 3 | 2 | |
| 4 | 1 | 5 | 3 | 2 | |
| Summe | | | | | SF(n-1)+SF(n-2)=9+2=11<br>= fixpunktfreie Permutation von n Elementen mit einem festgehaltenen Element (=1) |

Dasselbe Verfahren kann man mit dem Paar 1-3, 1-4 und 1-5 wiederholen, also (5-1)=4 mal. Demnach ist

$$SF(5) = (5-1) \cdot \big(SF(5-1) + SF(5-2)\big) = 4 \cdot \big(SF(4) + SF(3)\big) = 4 \cdot (9+2) = 44$$

Das Prinzip ändert sich für wachsende n nicht, also:

$$SF(n) = (n-1) \cdot \big(SF(n-1) + SF(n-2)\big) \qquad bzw. \;\; !\,n = (n-1)(!\,(n-1) + !\,(n-2))$$

# 4 Permutationen mit fester Anzahl von Fixpunkten

Diese werden als partielle Derangements bezeichnet. Man gibt als Bedingung vor, dass *genau* k von n unterschiedlichen Elementen fix bleiben sollen. Diese Bedingung sagt *nicht*, welche k Elemente es sein sollen. Sie sagt aber, dass es *genau* k Elemente sein sollen, nicht etwa wenigstens k Elemente oder maximal k Elemente.

Die Lösung lässt sich leicht auf die oben abgeleiteten Ergebnisse zurückführen.

Man bezeichnet die Anzahl von Permutationen von n Elementen mit genau k Fixpunkten mit $d_{n,k}$. Dabei gilt $d_{n,0}=d_n$. Die k Fixelemente kann man über $\binom{n}{k}$ Arten aus n Elementen auswählen. Zu jeder dieser Auswahlen sollen die restlichen (n-k) Elemente fixpunktfreie Permutationen bilden, also:

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k,0} = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k} \tag{4}$$

## 4.1 Diskrete Verteilung P(n, k) der Anzahl der Fixpunkte

Die zu Gleichung 4 passende Wahrscheinlichkeit P(n, k) ist dann mit Gleichung 2:

$$P(n,k) = \frac{d_{n,k}}{n!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{d_{n-k}}{n!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n!} \cdot (n-k)! \cdot \sum_{\mathrm{i}=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\mathrm{i}=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!} \tag{5}$$

P(n, k) nach Gleichung 5 ist die diskrete Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den n! Permutationen unter n verschiedenen Objekten gerade solche mit genau k Fixpunkten auftreten [WiKi Zufällige Permutationen].

Wegen

$$P(n, k=0) = \frac{1}{0!} \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} \frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!} = \frac{!\,n}{n!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(n,0) = \lim_{n\to\infty} \frac{!\,n}{n!} = \frac{1}{e}$$

strebt $P(n \to \infty, 0)$ gegen den festen Wert 1/e.

Außerdem gilt

$$P(n, k=n-1) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{\mathrm{i}=0}^{1} \frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!} = \frac{(1-1)}{(n-1)!} = 0$$

Es gibt keine Permutation von n Elementen mit genau (n-1) Fixpunkten. Das leuchtet unmittelbar ein, denn wenn (n-1) Elemente fix sind, dann hat auch das n-te Element keine

Bewegungsmöglichkeiten mehr und muss ebenfalls fix sein. Deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Elemente fix sind:

$$P(n,n) = \frac{1}{n!}\sum_{\mathrm{i}=0}^{0}\frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!} = \frac{1}{n!}$$

Auch das ist klar: Wenn alle Elemente fix sind, gibt es genau eine Permutation – die initiale. Deren Wahrscheinlichkeit ist bei insgesamt n! Permutationen dann gleich 1/n!.

Interessant ist es weiterhin, dass sich P(n,0) und P(n,1) für große n sehr schnell annähern:

$$\mathrm{P(n,1)} = \frac{1}{1!}\cdot\sum_{\mathrm{i}=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!} \approx \mathrm{P(n,0)} = \frac{1}{1!}\cdot\sum_{\mathrm{i}=0}^{n}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!} \approx \frac{1}{e} = 36{,}8\%$$

Die folgende Tabelle zeigt die %-Werte für P(n, k) für 2<=n<=10 auf eine Kommastelle gerundet. .

| | | | | | k | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **Summen** |
| **2** | 50,0 | 0,0 | 50,0 | | | | | | | | | 100,0 |
| **3** | 33,3 | 50,0 | 0,0 | 16,7 | | | | | | | | 100,0 |
| **4** | 37,5 | 33,3 | 25,0 | 0,0 | 4,2 | | | | | | | 100,0 |
| **5** | 36,7 | 37,5 | 16,7 | 8,3 | 0,0 | 0,8 | | | | | | 100,0 |
| **6** | 36,8 | 36,7 | 18,8 | 5,6 | 2,1 | 0,0 | 0,1 | | | | | 100,0 |
| **7** | 36,8 | 36,8 | 18,3 | 6,3 | 1,4 | 0,4 | 0,0 | 0,0 | | | | 100,0 |
| **8** | 36,8 | 36,8 | 18,4 | 6,1 | 1,6 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | | | 100,0 |
| **9** | 36,8 | 36,8 | 18,4 | 6,1 | 1,5 | 0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | | 100,0 |
| **10** | 36,8 | 36,8 | 18,4 | 6,1 | 1,5 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 100,0 |
| | | | | | | | | | | | | |
| **100** | 36,8 | 36,8 | 18,4 | 6,1 | 1,5 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 100,0 |

Man erkennt, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für wachsende n stabilisieren auf k-Werte < 6. Die Wahrscheinlichkeiten für größere k sind verschwindend gering.

## 4.2 Mittelwert und Streuung der Anzahl der Fixpunkte

Zunächst gilt für beliebige n (das ist wichtig für die folgende Berechnung der Momente):

$$\sum_{k=0}^{n} P(n,k) = 1 \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Die mittlere Anzahl von Fixpunkten ist dann

$$E[K] = \sum_{k=0}^{n} k\cdot P(n,k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}\cdot\sum_{\mathrm{i}=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!}$$

Da der Summand für k=0 wegen der Multiplikation mit k wegfällt, wird daraus:

$$E[K] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\sum_{\mathrm{i}=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{\mathrm{i}!}$$

Mit der Substitution l=k-1 wird daraus:

$$E[K]=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{\mathrm{l!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{n-(l+1)}\frac{(-1)^{i}}{\mathrm{i!}}=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{\mathrm{l!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{(n-1)-\mathrm{l}}\frac{(-1)^{i}}{\mathrm{i!}}=\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{P(n-1,l)}=1$$

Dabei wurde Gleichung 6, die ja für beliebige n gilt, für n:=(n-1) verwendet.

Für den quadratischen Mittelwert bekommt man ähnlich wie oben:

$$E[K^2]=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot P(n,k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{k!}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{n-k}\frac{(-1)^{i}}{\mathrm{i!}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k-1)!}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{n-k}\frac{(-1)^{i}}{\mathrm{i!}}$$

Auch hier wird wieder substituiert l=k-1:

$$\mathrm{E}[K^2]=\sum_{\mathrm{l=0}}^{\mathrm{n-1}}\frac{(\mathrm{l}+1)}{\mathrm{l!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{(n-1)-l}}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}=\sum_{\mathrm{l=0}}^{\mathrm{n-1}}\frac{1}{\mathrm{l!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{(n-1)-l}}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}+\sum_{\mathrm{l=0}}^{\mathrm{n-1}}\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{l!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{(n-1)-l}}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}$$

Die erste Doppelsumme ergibt gerade wieder (wie oben) E[K], die zweite mit m=l-1 ebenfalls:

$$\sum_{\mathrm{l=0}}^{\mathrm{n-1}}\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{l!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{(n-1)-l}}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}=\sum_{\mathrm{m=0}}^{\mathrm{n-2}}\frac{1}{\mathrm{m!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{(n-2)-m}}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}=\sum_{\mathrm{m=0}}^{\mathrm{n-2}}\mathrm{P(n-2,m)}=1$$

Also :

$$\mathrm{E}[K^2]=2\cdot E[K]=2$$

Für die Varianz bekommt man damit

$$\mathrm{V[K]=E[K^2]-(E[K])^2=2-1=1}$$

Das ist ein erstaunliches Ergebnis: Sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz der Anzahl der Fixpunkte ist unabhängig von n immer gleich 1.

Beliebige Momente leitet der Mathematiker mit der Momenterzeugenden Funktion ab. [WiKi Fixpunkte]

## 4.3 Asymptotisches Verhalten von P(n, k) für große n

Für Werte von n > 10, bei denen auch entsprechend große Werte von k vorkommen, sind die letzten Werte von P(n, k) sehr klein:

$$P(n,k\approx n)\approx\frac{1}{n!}\ll 1$$

Damit kann man die Summe in Gleichung 5 in guter Näherung formal bis unendlich laufen lassen:

| | |
|---|---|
| $P(n,k)=\frac{1}{\mathrm{k!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-k}}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}\approx\frac{1}{\mathrm{k!}}\cdot\sum_{\mathrm{i=0}}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i!}}=\frac{e^{-1}}{k!}$ | 7 |

Ein Vergleich mit der diskreten Poisson-Verteilung, dass die Verteilung der Anzahl der Fixpunkte für große n asymptotisch gegen die Poisson-Verteilung für λ=1 strebt.

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad P_1(k) = \frac{1^k}{k!}e^{-1} = \frac{e^{-1}}{k!} = P(n,k)$$

Auch für die Poisson-Verteilung gilt E[K]=Var[K]=λ=1.

# 5 Lösung der Aufgaben aus den Vorbemerkungen

Wen die 6 Ehepaare nie zusammen tanzen dürfen, dann bedarf es vollständiger Derangements, also fixpunktfreier Permutationen. Dabei können die verheirateten Damen und Herren z.B. jeweils dieselbe Nummer (=Indexwert 1-2-3-4-5-6) bekommen. Die Damen bleiben nebeneinander stehen und bilden so die initiale Permutation. Die Herren nehmen jeweils vor einer Dame Aufstellung, die nicht ihre Ehefrau ist.

Es gibt daher !6= 265 derartige Aufstellungen der Herren vor den Damen, bei denen keiner der Herren wieder vor seiner Angetrauten steht.

BEACHTE: Die Fixpunktfreiheit gilt bezüglich der initialen Nummerierung. Zwischen zwei der fixpunktfreien Permutationen gibt es durchaus Elemente, die ihren Platz nicht verändern. So könnte die Reihenfolge der Herren an einem Tag so aussehen: 214365 und am nächsten Tag 654321. Beide Zuordnungen sind fixpunktfrei bezüglich 123456, also bezüglich der Ehefrauen. Trotzdem tanzt an beiden Tagen Dame 3 mit Herrn 4 und Dame 4 mit Herrn 3!

Wenn man nun danach fragt, wie oft die Paare tanzen können, ohne dass irgendjemand wieder mit demselben Tanzpartner tanzt, so ist die Anzahl einfach (n-1), was sich einfach aus der zyklischen Verschiebung ergibt, die nach (n-1) Verschiebungen wieder auf die initiale Aufstellung führt: 612345 – 561234 – 456123 – 345612 – 23456

Bei dem „Farbenblinden“, der von 8 farbgleichen Paarungen 5 erkannt hat, berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 5 oder 6 oder 7 oder 8 Paarungen rein zufällig richtig zugeordnet wurden:

$$P(8, k \geq 5) = \sum_{k=5}^{8} P(8,k) = 0{,}27778\% + \ 0{,}06944\% + \ 0{,}00000\% \ + 0{,}00248\% = 0{,}35\%$$

Wir zählen also alle höheren Werte k>5 noch dazu, was zugunsten der Zufalls-Hypothese spricht. P(8, k>=5) ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallspermutation von 8 Elementen 5 oder mehr Fixpunkte hat. Diese Wahrscheinlichkeit ist mit nur 0,35% sehr klein, was dafür spricht, dass der Betreffende doch in einem gewissen Maße Farben erkennen kann. Ob er damit weiterhin Autofahren kann, ist ungewiss…

# 6 Literatur


[Mende] Kardinalität nichtdisjunkter Mengen
https://mathe-gut-erklaert.de/pdfs/000_Additionssatz_P.pdf

[WiKi Subfakultät] Subfakultät https://de.wikipedia.org/wiki/Subfakult%C3%A4t

[WiKi Zufällige Permutationen] Zufällige Permutationen
https://de.wikipedia.org/wiki/Zuf%C3%A4llige_Permutation#Anzahl_der_Fixpunkte