

Fourieranalyse: Fourier-Reihen, Fourier-Integrale, DFT und FFT

Dr. Ulrich Mende

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Zielstellung	3
1.2	Reelle und komplexe harmonische Schwingungen.....	3
1.2.1	Sinus- und Cosinus-Funktionen als Projektionen am Einheitskreis.....	3
1.2.2	Komplexe harmonische Schwingung.....	4
1.2.3	Einführung negativer Frequenzen.....	6
2	Periodische Funktionen und ihre unendliche Fourier-Reihe.....	7
2.1	Grundproblem und Reihenansatz	7
2.2	Betrag und Phase – grafische Darstellung des Linienspektrums.....	9
2.3	Leistungsbilanz – Theorem von Parseval.....	9
2.4	Besonderheiten	10
2.4.1	Gleichanteil a_0 , b_0 und c_0	10
2.4.2	Gerade und ungerade Funktionen	11
2.4.3	Wahl der Intervallgrenzen bei der Koeffizienten-Bestimmung.....	11
2.4.4	Verschiebung der Zeitfunktion nach oben und unten	12
2.4.5	Verschiebung der Zeitfunktion in Richtung der t-Achse	12
2.4.6	Analyse über mehrere Perioden T	13
2.4.7	Die Minimum-Eigenschaft der Fourier-Reihen.....	14
2.4.8	Das Gibbs'sche Phänomen	14
2.5	Beispiele für Fourier-Reihen.....	15
2.5.1	Beispiel: Rechteckschwingung.....	15
2.5.2	Beispiel Sägezahn-Schwingung.....	18
3	Nichtperiodische Funktionen – Fourier-Integral.....	21
3.1	Vergrößerung der Periode T = Verkleinerung der Grundfrequenz ω_0	21
3.2	Grenzübergang $T \rightarrow \infty$	22
3.2.1	Energiebilanz – Theorem von Parseval	23
3.2.2	Amplitudenspektrum eines einzelnen Rechteckimpulses.....	23
3.3	Horizontalverschiebung.....	25
3.3.1	Horizontale Verschiebung der Zeitfunktion	25
3.3.2	Horizontale Verschiebung des Spektrums	26
4	Anwendung der Fourier-Analyse in der Theorie linearer Systeme	26
4.1	Lineare Systeme, lineare DLG und komplexe Schwingungen	26
4.2	Lösung der linearen System-DLG mittels komplexer Fourier-Analyse.....	28
4.3	Hinweis auf die komplexe Wechselstromrechnung.....	31

5	Abtastung und Periodifizierung.....	32
5.1	Allgemeines	32
5.2	Abtastfunktion: Dirac-Stoß und Dirac-Kamm.....	32
5.3	Abtastung im Zeitbereich = periodische Fortsetzung im Frequenzbereich	35
5.3.1	Verletzung der Abtastregel $f_{\max} \leq f_a/2$ – Aliasing	39
5.4	Abtastung im Frequenzbereich = periodische Fortsetzung im Zeitbereich	40
6	Multiplikation und Faltung	41
6.1	Multiplikation im Frequenzbereich = Faltung im Zeitbereich	41
6.2	Multiplikation im Zeitbereich = Faltung im Frequenzbereich	42
7	Tabellarische Zusammenfassung – Analogien zwischen Zeit- und Frequenzbereich	44
8	Diskrete Fourier-Transformation.....	46
8.1	Diskretisierung und Begrenzung des Zeitsignals.....	46
8.2	Abtast-Theorem nach Kotelnikov/Shannon	46
8.3	Der Algorithmus der Fast Fourier Transformation (FFT)	48
9	FFT mit EXCEL	51
9.1	AddIn „Analyse“ installieren.....	51
9.2	Komplexe Zahlen in EXCEL.....	51
9.3	Aufruf der „Fourieranalyse“ und Auswertung der Ergebnisse.....	52
9.3.1	Aufruf in einem Arbeitsblatt.....	52
9.3.2	Aufruf im VBA-Code	53
10	Beispiele zu FFT	54
10.1	Endliche Fourier-Reihe als Interpolationsfunktion.....	54
10.2	Sinussignal in starkem Rauschen erkennen	56
10.3	Verschiebung des Spektrums = Modulation der Zeitfunktion	59
10.4	Inverse FFT zur Berechnung der Stoßantwort eines Tiefpasses.....	61
10.4.1	Analytische Lösung über die komplexe Übertragungsfunktion $G(\omega)$	61
10.4.2	Lösung via FFT.....	63
11	Literatur.....	66

1 Grundlagen

1.1 Zielstellung

Jeder Musiker verwendet die Begriffe Tonleiter, Dreiklang, Harmonie, Kammerton A... Und die Akustik-Techniker sprechen von Bandbreite, Over-Sampling, Frequenzgang und Klirrfaktor. Die Akustik ist das Gebiet, das die Fourieranalyse vermutlich am stärksten geprägt und beeinflusst hat – einfach weil wir Menschen unseren Hörsinn haben, der Töne direkt aufnehmen kann.

Die Fourieranalyse stellt ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Zeitsignalen und ihrer Übertragung über technische Systeme dar, das aber weit über die Akustik hinausgeht.

Rein mathematisch betrachtet, würde man die Theorie der Fourieranalyse mit den Fourier-Integralen für zeitlich und spektral unbegrenzte Funktionen beginnen und darauf aufbauend die folgenden Spezialfälle behandeln:

- Zeitbegrenzung und periodische Fortsetzung der Zeitfunktion
Das entspricht einer Diskretisierung des Spektrums (= Abtastung im Frequenzbereich=Fourier-Reihe)
- Spektralbegrenzung und periodische Fortsetzung des Spektrums
Das entspricht einer Diskretisierung der Zeitfunktion (= Abtastung im Zeitbereich)
- Diskrete Fourier-Transformation
Das entspricht einer Begrenzung sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich.

Diese Vorgehensweise wäre logisch, ist aber für Ingenieure nicht intuitiv. Deshalb beginnen wir hier mit den leicht verständlichen, periodischen Zeitfunktionen und ihren Fourier-Reihen, und leiten aus diesen dann das unendliche Fourier-Integral ab.

Erst dann behandeln wir das Problem der Abtastung, zunächst im Zeitbereich, später auch – wieder Bezug auf die Fourier-Reihen nehmend – im Frequenzbereich.

Grundlage aller Betrachtungen sind die Bausteine der harmonischen Schwingungen, also die Cosinus- und Sinus-Funktionen.

1.2 Reelle und komplexe harmonische Schwingungen

1.2.1 Sinus- und Cosinus-Funktionen als Projektionen am Einheitskreis

Wenn sich ein Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 in mathematisch positiver Richtung auf dem Einheitskreis (Radius = 1) bewegt, dann ergeben seine Projektionen auf die x- bzw. die y-Achse die harmonischen Schwingungen

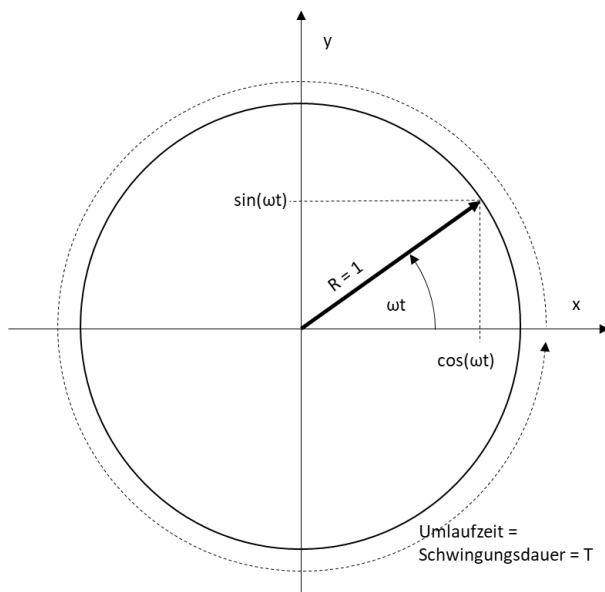


Abbildung 1 Sinus- und Cosinus-Funktionen als Projektion im Einheitskreis

$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad y(t) = \sin(\omega_0 t)$	1
---	---

Dabei ist T die Umlaufdauer bzw. die Schwingungsdauer und ω die sich daraus ergebende konstante Winkelgeschwindigkeit:

$\omega_0 = \frac{360^\circ}{T} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f_0$	2
--	---

Oft wird auch mit der Frequenz (= Drehzahl) f gerechnet.

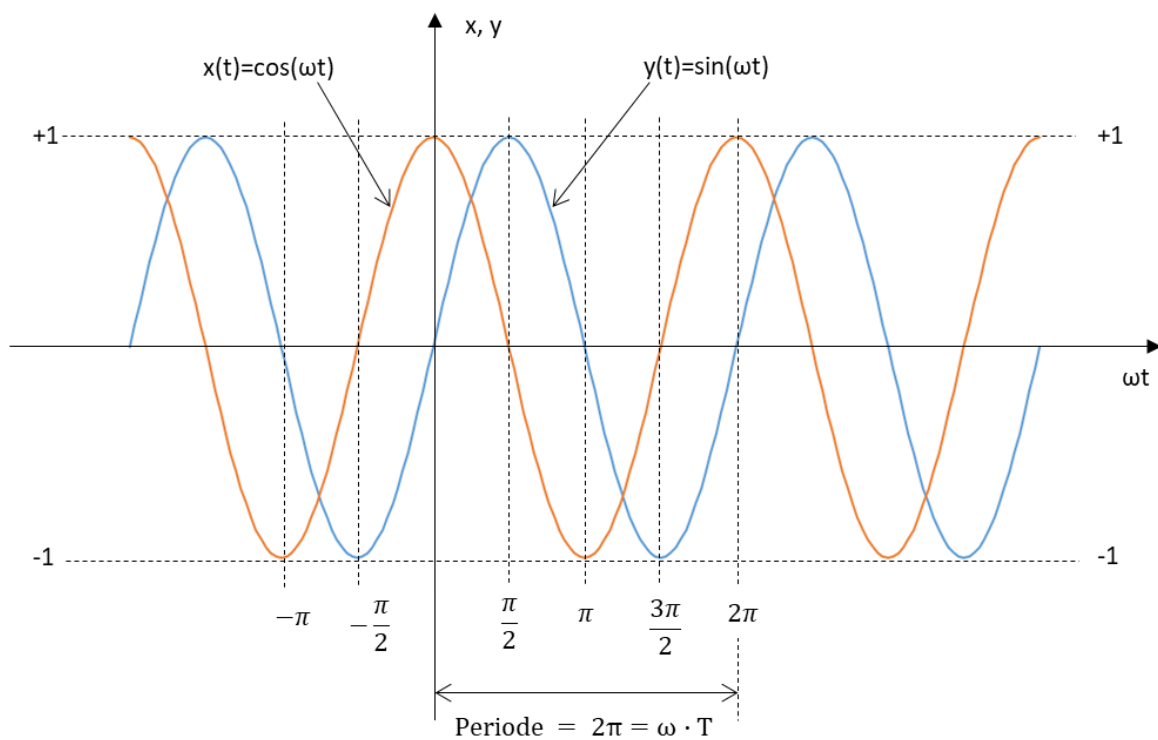


Abbildung 2: Sinus- und Cosinus-Funktionen als Abwicklung am Einheitskreis

Eine harmonische Schwingung ist für Ingenieure die Veränderung einer physikalischen Größe nach einer reinen zeitlichen Cosinus- oder Sinus-Funktion.

1.2.2 Komplexe harmonische Schwingung

Wenn man die y-Achse als komplexe Achse auffasst, dann kann man den umlaufenden Punkt als zeitveränderliche, komplexe Zahl schreiben:

$z(t) = x(t) + jy(t) = \cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t)$	3
---	---

Dieser Übergang zu den komplexen Zahlen verkompliziert die Sache erst einmal, bringt aber dann so entscheidende Vorteile, dass es sich lohnt. Eine der wichtigsten Gleichungen der Mathematik, die sog. Eulerformel, fasst die die beiden Summanden in Gl (3) in einer einzigen e-Funktion mit imaginärem Argument zusammen:

$\cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t}$	4
---	---

Eine mögliche Plausibilitätserklärung für Gl (4) liegt in der Reihenentwicklung der e-Funktion für ein rein imaginäres Argument:

$$\begin{aligned}
 e^{jx} &= 1 + \frac{(jx)}{1!} + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} \dots \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \right) + j \cdot \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) \\
 &= \cos(x) + j \cdot \sin(x)
 \end{aligned}$$

In der Frequenzanalyse rechnet man oft mit diesen komplexen harmonischen Schwingungen. Die dabei auftretenden Integrale lassen sich genau wie reelle Integrale berechnen; die imaginäre Einheit j wird dabei als Konstante behandelt. Der große Vorteil der komplexen e-Funktion gegenüber den reellen Sinus- und Cosinus-Funktionen besteht in zweierlei:

- Die e-Funktion erfasst $\sin()$ und $\cos()$ gleichzeitig; man muss diese nicht einzeln behandeln
- Integrale mit einer e-Funktion sind viel einfacher zu berechnen als solche mit \cos - und \sin -Funktionen

Wir verwenden an dieser Stelle bereits ω_0 anstelle von ω , weil wir die konkrete Winkelgeschwindigkeit meinen, die zu einer bestimmten Umlaufzeit T gehört – Gl (2). Wir werden im Folgenden jeweils mit den vielfachen der Winkelgeschwindigkeit $k \cdot \omega_0$ rechnen.

Mittelwert über ein beliebiges Intervall $[t_0, t_0+T]$:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 1 \cdot dt = 1 & \text{für } k = 0 \\ \frac{(e^{jk\omega_0(t_0+T)} - e^{jk\omega_0 t_0})}{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T} = \frac{e^{jk\omega_0 t_0} \cdot (e^{j2\pi k} - 1)}{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T} = 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass die Mittelwerte über die Grundperiode T aller \cos - und \sin -Schwingungen mit Vielfachen der Grundfrequenz ω_0 gleich Null sind.

Betrachtet man das Produkt zweier Harmonischer mit den Frequenzen $k \cdot \omega_0$ und $n \cdot \omega_0$, so ergibt sich als Integral über die Schwingungsdauer T :

$\frac{1}{T} \int_{(T)} e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt = \begin{cases} 1 & \text{für } k + n = 0 \\ 0 & \text{für } k + n \neq 0 \end{cases}$	5
---	---

Gl (8) wird als Orthogonalität bezeichnet. Diese Eigenschaft erlaubt die einfache Berechnung der Fourier-Koeffizienten. Es ist dabei wieder egal, in welchen Grenzen von t man genau integriert-wichtig ist, dass man über eine volle Periode T integriert.

Eine komplexe harmonische Schwingung nach Gl (4) liefert nie einen für alle Zeiten verschwindenden Imaginärteil. Dieser wird zwar zu den Zeiten gleich Null, wo die Sinusfunktion Null wird ($\omega \cdot t = k \cdot \pi$), dazwischen existiert aber ein nichtverschwindender Imaginärteil.

1.2.3 Einführung negativer Frequenzen

Um rein reelle Schwingungen aus komplexen Schwingungen zusammensetzen, muss man auch negative Frequenzen zulassen (=negativer Exponent in der e-Funktion):

$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \qquad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$	6
---	---

Für die Cosinus-Funktion bedeutet das, dass zwei gegenläufige komplexe Schwingungen (die mit positivem Exponenten im mathematisch positiven Sinne, die mit negativem Exponenten im Uhrzeigersinn) sich im Imaginärteil gerade **zu jedem Zeitpunkt** aufheben und im Realteil verdoppeln. Durch den Faktor 2 im Nenner entsteht eine einzelne stets reelle Cosinus-Funktion. Entsprechendes gilt für den Imaginärteil bei der Sinus-Funktion.

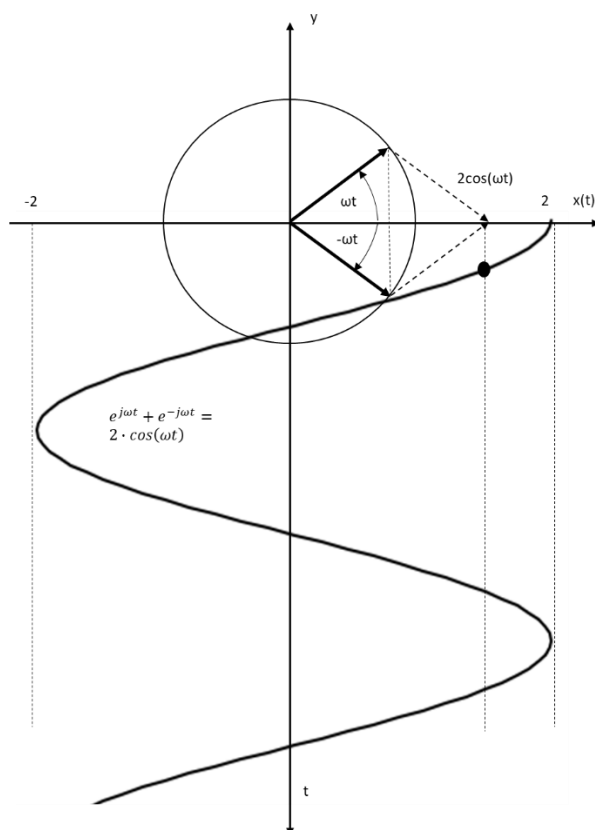


Abbildung 3: Realisierung einer rein reellen Cosinus-Schwingung durch zwei gegenläufige komplexe Schwingungen

2 Periodische Funktionen und ihre unendliche Fourier-Reihe

2.1 Grundproblem und Reihenansatz

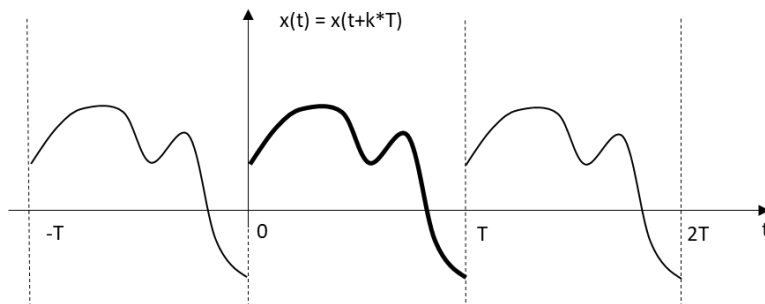


Abbildung 4: Zeitperiodische Funktion $x(t)$ mit Periode T

Die Frage, die sich Fourier stellte und löste, ist:

kann man eine beliebige zeitperiodische Funktion $x(t)$ zusammensetzen aus den zeitperiodischen „Basis“-Funktionen Sinus und Cosinus? Und wenn ja, welche der Basisschwingungen sind mit welcher Amplitude und mit welcher Frequenz daran beteiligt?

Es leuchtet ein, dass die niedrigste Frequenz, die am Aufbau einer periodischen Zeitfunktion mit der Periode T beteiligt sein kann, genau die Frequenz $f_0=1/T$ ist. Alle Vielfachen dieser Frequenz sind dann ebenfalls periodische Schwingungen, die sich innerhalb von T wiederholen.

Es liegt also nahe, eine zeitperiodische Funktion mit der Periode T und damit mit der Grundfrequenz ω_0 , darzustellen als Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Amplitude und Vielfachen dieser Frequenz ω_0 .

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$	7
--	---

Dabei sind die a_k und b_k die reellen Fourier-Koeffizienten der unendlichen Fourier-Reihe der mit T periodischen reellen Funktion $x(t)$. Das Glied a_0 spielt dabei eine Sonderrolle, da es den (doppelten) Gleichanteil der Funktion ($\omega=0$) darstellt. Der Faktor $\frac{1}{2}$ erklärt sich aus den noch folgenden einheitlichen Berechnungsvorschriften für die a_k und b_k . Um die Berechnung der unbekanntenen Koeffizienten a_k und b_k zu vereinfachen, setzen wir für die cos- und sin-Ausdrücke die komplexen Schwingungen nach Gl (6) ein und sortieren nach positiven und negativen Frequenzen:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - jb_k)}{2} \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} + \frac{(a_k + jb_k)}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Mit den folgenden komplexen Koeffizienten c_k können wir die Summe zusammenfassen und von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen lassen.

$$c_k = \frac{(a_k - jb_k)}{2} \quad \bar{c}_k = \frac{(a_k + jb_k)}{2} \quad (\text{konjugiert komplex})$$

Das Ergebnis ist die kompakte, komplexe Schreibweise für die unendliche Fourier-Reihe der **reellen**, zeitperiodischen Funktion $x(t)$.

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$	8
---	---

Zur Bestimmung der komplexen Koeffizienten c_k (und damit auch gleich der reellen Koeffizienten a_k und b_k) multiplizieren wir Gl (8) mit einer konkreten Schwingung $-n \cdot \omega_0$, welche rechtsherum läuft (Minuszeichen im Exponenten!) und integrieren den gesamten Ausdruck über die Zeit von 0 bis T.

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot (k-n) \cdot \omega_0 \cdot t} dt = c_n$$

Durch diese Operation wird die – und nur die - uns interessierende Schwingung mit der Frequenz $k \cdot \omega_0$ quasi „zurückgedreht“ und damit zum Stillstand gebracht. Die folgende Integration ermittelt die Amplitude c_k für $k=n$ und ergibt Null für alle anderen Kombinationen von Frequenzen mit $k \neq n$. Damit bekommen wir für die Koeffizienten der (komplexen) Fourier-Reihe einer zeitperiodischen Funktion:

$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt \quad k \geq 0$	9
---	---

Die Gleichungen (8) und (9) lösen die Sonderrolle des Mittelwertes sehr elegant. Durch die Einführung negativer Frequenzen läuft die Reihe von $-\infty$ bis $+\infty$ und erfasst dabei alle c_k doppelt. Lediglich c_0 (Mittelwert), der genau in der Mitte bei $f=0$ liegt, tritt bei der Summation nur einmal auf. Damit gilt für alle c_k ($k \geq 0$) dieselbe Formel (9).

Da $x(t)$ eine reelle Funktion ist, kann man Gl (9) einfach in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt - j \cdot \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt = \frac{a_k - j b_k}{2}$$

Daraus folgt die rein reelle Darstellung:

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)]$ $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt \quad k \geq 0$	10
---	----

BEACHTEN:

Für alle a_k gilt dieselbe Formel mit dem Faktor $2/T$ vor dem Integral. Da der Mittelwert der Funktion aber den Faktor $1/T$ benötigt, steht in der Reihe $a_0/2$.

2.2 Betrag und Phase – grafische Darstellung des Linienspektrums

Zur grafischen Darstellung der Spektrallinien über der Frequenz verwendet man oft die Darstellung nach Betrag und Phase. Am einfachsten ist das bei der komplexen Fourier-Reihe. Wir berechnen Betrag und Phase des komplexen Zeigers c_k :

$ c_k = \sqrt{\operatorname{Re}(c_k)^2 + \operatorname{Im}(c_k)^2}$	11
--	----

$\arg(c_k) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(c_k)}{\operatorname{Re}(c_k)}\right) & \text{für } \operatorname{Re}(c_k) \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(c_k)}{\operatorname{Re}(c_k)}\right) & \text{für } \operatorname{Re}(c_k) < 0 \end{cases}$	12
---	----

Wenn man den Betrag $|c_k|$ über der Frequenz (bzw. über k) ab, so bekommt man das sog. Amplitudenspektrum. Für den Winkel $\arg(c_k)$ bekommt man das Phasenspektrum, das aber wenig verwendet wird.

Die sin-cos-Paare der reellen Fourier-Reihe mit ihren Koeffizienten a_k und b_k kann man auch als eine einzige, phasenverschobene Cosinus-Funktion schreiben:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}(a_k) \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cdot \cos\left(k\omega_0 t - \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)\right)$$

Da der ArcTan die Phase nur um $\pm 90^\circ$ verschieben kann, muss für negative Vorzeichen ($=-180^\circ$) noch die Signum-Funktion auf die a_k angewendet werden.

Das reelle Amplitudenspektrum ist doppelt so groß wie das komplexe, bei dem man allerdings auch negative Frequenzen erfassen müsste. Deshalb sollte man an grafischen Darstellungen stets genau vermerken, was man darstellt.

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{(2 \cdot \operatorname{Re}(c_k))^2 + (2 \cdot \operatorname{Im}(c_k))^2} = 2 \cdot |c_k|$$

In den Beispielen werden grafische Darstellungen des Amplituden- und des Phasenspektrums gezeigt.

2.3 Leistungsbilanz – Theorem von Parseval

Die mittlere Leistung der periodischen Zeitfunktion ist:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) \cdot dt$$

Als Ingenieur kann man dabei an die Leistung denken, die eine zeitabhängige Spannung $u(t)$ an einem ohmschen Widerstand von 1Ω erbringt:

$$P(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u^2(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt$$

Dieselbe mittlere Leistung muss von allen Komponenten der Fourier-Reihe zusammen ebenfalls erbracht werden. Auch hier führt die Orthogonalität dazu, dass man die Leistungen der einzelnen Sin- und cos-Bestandteile getrennt berechnen und dann addieren kann.

Eine einzelne Sin-Schwingung hat – über eine oder mehrere volle Perioden gerechnet – gerade die folgende mittlere Leistung

$$\overline{P}_{sin} = \frac{1}{T} \int_0^T (x_0 \cdot \sin(k\omega_0 t))^2 dt = \frac{x_0^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(4\pi k \frac{t}{T}\right)\right) dt = \frac{x_0^2}{2}$$

Die mittlere Leistung hängt nicht von der Frequenz ab!

Damit muss man zur Berechnung der mittleren Gesamtleistung einfach die Amplitudenquadrate aller beteiligten Schwingungen addieren und zum Schluss durch 2 dividieren.

$\bar{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_k^2 + b_k^2)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{ c_k ^2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k ^2$	13
---	----

In der rechten Seite von Gl (13) ist zu beachten, dass die Summe von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, dass die $|c_k|$ also doppelt vorkommen.

2.4 Besonderheiten

2.4.1 Gleichanteil a_0 , b_0 und c_0

Wegen der häufigen Verwirrungen um a_0 , b_0 , c_0 und den Mittelwert hier noch einmal die Zusammenfassung.

Ausgangspunkt ist der Mittelwert der in T periodischen Funktion, der auch als Gleichanteil bezeichnet wird.

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) dt$$

Der Mittelwert kann positiv, Null oder negativ sein, er kann über ein beliebiges Intervall $[t_0, t_0+T]$ ermittelt werden. Der Wert von c_0 ist stets mit dem Mittelwert identisch; es ist wie dieser immer reell.

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) \cdot e^{-j \cdot 0 \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) dt = \bar{x}$$

Da für alle a_k – und damit insbesondere auch für a_0 - dieselbe Berechnungs-Gleichung gilt, ist a_0 doppelt so groß wie der Mittelwert:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt = 2 \cdot \bar{x}$$

Aus diesem Grund muss der Gleichanteil in der reellen Fourier-Reihe mit $a_0/2$ erfasst werden.

Die b_0 sind stets gleich Null – schon weil $\sin(0)=0$ ist.

2.4.2 Gerade und ungerade Funktionen

Gerade Funktionen

Bei geraden Funktionen sind alle b_k gleich Null; die c_k sind rein reell. Ein Gleichglied (=nichtverschwindender Mittelwert) ist ebenfalls eine gerade Funktion.

Ungerade Funktionen

Echte, ungerade Funktionen haben ausschließlich b_k -Komponenten; die c_k sind alle rein imaginär. Eine echt ungerade Funktion kann keinen Mittelwert $\neq 0$ haben. Häufig werden aber Funktionen betrachtet, die eigentlich ungerade sind, aber doch einen Mittelwert haben, die also einfach nach oben verschoben wurden. Dann kann man diesen Mittelwert berechnen und von der Funktion abziehen, um eine echte ungerade Funktion zu bekommen.

In vielen Fällen kann man durch eine Zeitverschiebung der Funktion die Berechnung stark vereinfachen, wenn man dadurch eine gerade oder ungerade Funktion erhält.

BEACHTEN:

Die Zeitverschiebung äußert sich in einer frequenz-proportionalen Phasenverschiebung, die man nicht außer Acht lassen darf - 2.4.5.

2.4.3 Wahl der Intervallgrenzen bei der Koeffizienten-Bestimmung

In Teilen der Literatur wird das Intervall der mit T periodischen Funktion mit $[-T/2, +T/2]$ angegeben, in anderen Teilen mit $[0, T]$. Letztlich ist es egal, Hauptsache man integriert zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten über eine volle Periode.

Die Koeffizienten hängen nicht von der Lage des Integrationsintervalls ab – s. Gl (5)! Wenn es keine Vorgaben gibt, dann sucht man sich am zweckmäßigsten diejenige Lage des Integrationsintervalls aus, bei der die Integration am einfachsten ist. Als Beispiel ermitteln wir die c_k der periodischen Rechteckschwingung in Abbildung 5. Dabei integrieren wir einmal über die das Intervall $[0, T]$ und dann über das Intervall $[-T/2, +T/2]$.

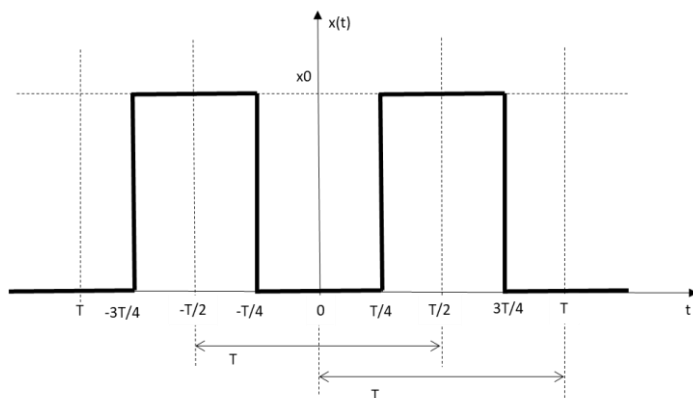


Abbildung 5: Beliebige Lage des Integrationsintervalls bei feststehender Funktion

Integration über das Intervall $[0, T]$:

$$c_k = \frac{x_0}{T} \int_{T/4}^{3T/4} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{x_0}{T} \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{3T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{4}}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} = \frac{x_0}{\pi k} \frac{e^{-j \cdot k \cdot \frac{3\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{-2j}$$

$$c_k = \frac{x_0}{\pi k} e^{-j \cdot k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x_0}{\pi k} \cdot (-1)^k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x_0}{\pi k} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Dabei fallen die geraden Potenzen von (-1) alle weg, da für diese k -Werte der \sin jeweils Null ist.

Wie zu erwarten war, sind alle c_k rein reell, da die Funktion gerade ist.

Integration über das Intervall $[-T/2, +T/2]$

Man erkennt hier bereits, dass dieses Intervall ungünstig ist, da man über zwei getrennte Bereiche integrieren muss, in denen $x(t)$ nicht Null ist.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{x_0}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt \right] \\ &= \frac{x_0}{T} \left[\frac{e^{+j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{4}} - e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{2}}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} + \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{4}}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right] = -\frac{x_0}{\pi k} \cdot \frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\pi} + e^{-jk\pi} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j} \\ &= -\frac{x_0}{\pi k} \cdot \left[\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin(k \cdot \pi) \right] = -\frac{x_0}{\pi k} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Man bekommt dieselben c_k , was leicht verständlich ist. Bei der Wahl unterschiedlicher Integrationsgrenzen bleiben Koordinatensystem und Funktion völlig unberührt. Es geht ausschließlich darum, über eine volle, aber beliebig gelegene Periode T zu integrieren, um die Orthogonalität der komplexen Schwingungen auszunutzen.

BEACHTEN:

Die freie Wahl der Integrationsgrenzen bedeutet nicht, dass man die Funktion frei auf der Zeitachse verschieben kann, ohne dass sich die Fourier-Koeffizienten ändern – siehe 2.4.5.

2.4.4 Verschiebung der Zeitfunktion nach oben und unten

Eine Verschiebung der Zeitfunktion nach oben und unten ändert lediglich deren Mittelwert, nicht aber die anderen Koeffizienten der Fourier-Reihe.

2.4.5 Verschiebung der Zeitfunktion in Richtung der t-Achse

Wenn man die Zeitfunktion in Richtung der positiven t-Achse um Δt verschiebt, so bekommt man die Zeitfunktion $x(t-\Delta t)$. (Vielen Schülern/Studenten fällt es schwer, das Minuszeichen zu verstehen – wo man doch in Richtung +t verschiebt. Eselsbrücke: Die Zeit t muss erst den Wert $t=\Delta t > 0$ erreichen, damit der Wert $x(0)$ entsteht, der vorher schon bei $t=0$ auftrat.)

Wir setzen diese Verschiebung in die komplexe Fourier-Reihe ein:

$$x(t - \Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot (t - \Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \Delta t}) \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Das ist eine Fourier-Reihe mit den neuen Koeffizienten

$$c_k^* = c_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \Delta t} \Rightarrow |c_k^*| = |c_k| \quad \text{und} \quad \arg(c_k^*) = \arg(c_k) - k \cdot \omega_0 \cdot \Delta t$$

Die Fourier-Koeffizienten der verschobenen Funktion $x(t-\Delta t)$ haben denselben Betrag, aber eine frequenzproportionale Phasenverschiebung.

Als Beispiel berechnen wir das Spektrum der in Abbildung 6 gezeigten Rechteckschwingung für $k > 0$.

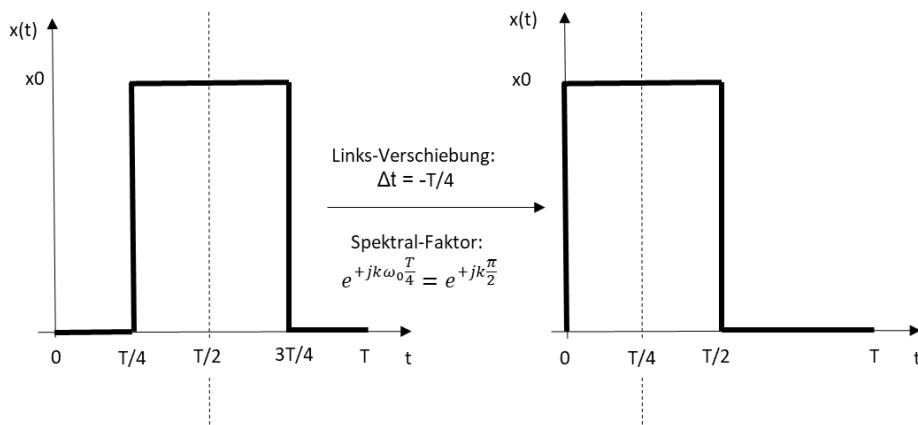


Abbildung 6: Verschiebung einer Rechteckschwingung nach links

Für die Lage des Rechteckimpulses entsprechend dem linken Teil von Abbildung 6 hatten wir bereits abgeleitet:

$$c_k = -\frac{x_0}{\pi k} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Nun schieben wir die Funktion um $T/4$ nach links, also $\Delta t = -T/4$, und berechnen die veränderten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_k^* &= \frac{x_0}{T} \int_0^{T/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{x_0}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_0 T/2} - 1}{-jk\omega_0} = -\frac{x_0}{\pi k} \cdot \frac{e^{+jk\omega_0 T/4} \cdot (e^{+jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2})}{2j} \\ &= -\frac{x_0}{k\pi} \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{+jk\omega_0 T/4} = c_k \cdot e^{+jk\omega_0 T/4} = c_k \cdot e^{+jk\pi/2} = \begin{cases} +j \cdot c_k & \text{für } k = 1, 5, 9 \dots \\ -j \cdot c_k & \text{für } k = 3, 7, 11 \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Tatsächlich erleidet das Spektrum durch die Zeitverschiebung eine frequenzproportionale Phasenverschiebung, wodurch die neuen Koeffizienten nun rein imaginär werden. Das ist verständlich, da die verschobene Funktion (abgesehen vom Gleichanteil) ungerade ist.

2.4.6 Analyse über mehrere Perioden T

Wenn man die Fourier-Analyse einer in T periodischen Funktion über $m > 1$ Perioden T , also über die Periode $m \cdot T$ durchführt, dann sinkt die Analyse-Grundfrequenz ω_0 auf den Wert

$$\omega_0^* = \frac{1}{m \cdot T} = \frac{\omega_0}{m}$$

Dabei ist ω_0 die nach wie vor unveränderte Grundfrequenz der in T periodischen Funktion bzw. ihrer Fourier-Reihe. Natürlich kann die Analyse nur diejenigen Frequenzen finden, die in der Funktion auch enthalten sind.

Wir gehen davon aus, dass wir die Reihenentwicklung zur Periode T schon kennen und führen auf ihr die Analyse zu $m \cdot T$ durch:

$$\begin{aligned} c_l^* &= \frac{1}{mT} \int_0^{mT} x(t) \cdot e^{-j \cdot l \cdot \omega_0^* \cdot t} dt = \frac{1}{mT} \int_0^{mT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot l \cdot \omega_0^* \cdot t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{1}{mT} \int_0^{mT} e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot l \cdot \omega_0^* \cdot t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{1}{mT} \int_0^{mT} e^{j \cdot (k \cdot \omega_0 - l \cdot \omega_0^*) \cdot t} dt \end{aligned}$$

Das Integral hat wegen der Orthogonalität nur einen von Null verschiedenen Wert für

$$k \cdot \omega_0 = l \cdot \omega_0^* = l \cdot \frac{\omega_0}{m} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{l}{m} \quad \text{bzw.} \quad l = k \cdot m$$

Damit bekommt man für die Koeffizienten der mehrfach-Periode:

$$c_l^* = \begin{cases} c_k & \text{für } k = l/m \cdot \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die folgende Abbildung demonstriert das für $m=3$.

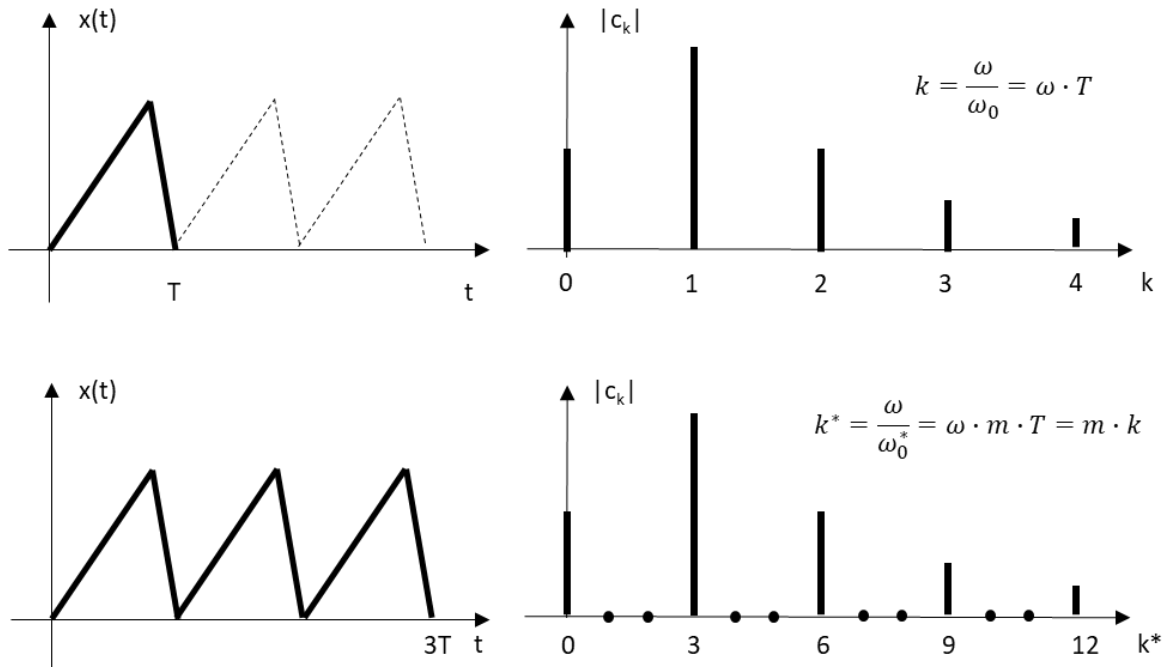


Abbildung 7: Analyse über $m=3$ Grund-Perioden T

2.4.7 Die Minimum-Eigenschaft der Fourier-Reihen

Wenn für eine in T periodische Funktion $x(t)$ den Ansatz

$$x_N(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)$$

macht, und mittels der Methode der kleinsten Summe der Fehlerquadrate die Koeffizienten A_k und B_k bestimmt, dann sind diese genau mit den a_k und b_k der jeweiligen Partialsumme der unendlichen Fourier-Reihe bis zur N -ten Schwingung identisch.

$$\int_0^T (x(t) - x_N(t))^2 dt \rightarrow \text{Minimum!}$$

Wenn man das Fehler-Integral durch eine Summe nähert, dann kann man das für konkrete Fälle leicht mit EXCEL-Solver nachprüfen.

2.4.8 Das Gibbssche Phänomen

Dieses Phänomen bezeichnet das Überschwingen endlicher (also abgebrochener) Fourier-Reihen an den Sprungstellen unstetiger Zeitfunktionen. Ein Beispiel dafür ist die Rechteckschwingung - Abbildung 11. Selbst wenn man immer mehr Glieder der Reihe in die Betrachtung einbezieht, ändert sich die relative Höhe des Überschwingens (bezogen auf die Sprunghöhe) nicht (Gibbssche Konstante) [Wiki Gibbs]. Lediglich die Dauer des Überschwingens nimmt ab.

2.5 Beispiele für Fourier-Reihen

2.5.1 Beispiel: Rechteckschwingung

Wir berechnen die komplexen und reellen Fourier-Koeffizienten für zentrierte Rechteck-Funktion, die wir bereits mit anderen Phasenlagen im Abschnitt 2.4.5 behandelt haben. Hier werden wir ausschließlich cos-Komponenten erhalten, da die Funktion gerade ist.

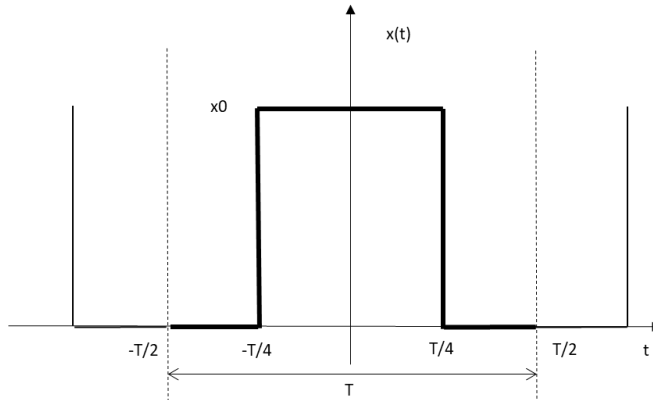


Abbildung 8: Beispiel: Rechteckschwingung

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{für } -\frac{T}{4} \leq t \leq +\frac{T}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad c_k = \frac{x_0}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

Für $k=0$ folgt sofort

$$c_0 = \frac{x_0}{2}$$

Das bedeutet, dass die Funktion einen Gleichanteil (= Mittelwert) von $x_0/2$ hat. Das ergibt sich auch unmittelbar aus der Abbildung: im zeitlichen Mittel ist der Wert eben $x_0/2$.

Für $k \gg 0$ wird

$$c_k = \frac{x_0}{T} \frac{\left(e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{4}} - e^{+j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{4}} \right)}{-j \cdot k \cdot \omega_0} = \frac{x_0}{\pi \cdot k} \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x_0}{2} \cdot \text{si}\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Dabei ist $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ die sog. Spaltfunktion. Wegen des alternierenden Vorzeichens im sin wird letztlich:

$$c_{k>0} = \begin{cases} \frac{x_0}{\pi \cdot k} & \text{für } k = 1, 5, 9, 13 \\ -\frac{x_0}{\pi \cdot k} & \text{für } k = 3, 7, 11, 15 \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, 8 \end{cases}$$

Bei den reellen Koeffizienten verschwinden sämtliche b_k , die a_k sind doppelt so groß wie die (hier reellen) c_k .

Wir zeichnen die ersten 6 Glieder (von denen 3 = Null sind) der Reihenentwicklung der Funktion $x(t)/x_0$, also die Funktion

$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos(\omega_0 t) - \frac{\cos(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{5} \right)$$

Es ist gut zu erkennen, wie die 3 Schwingungen sich an den Verlauf der Rechteckschwingung anzupassen „versuchen“.

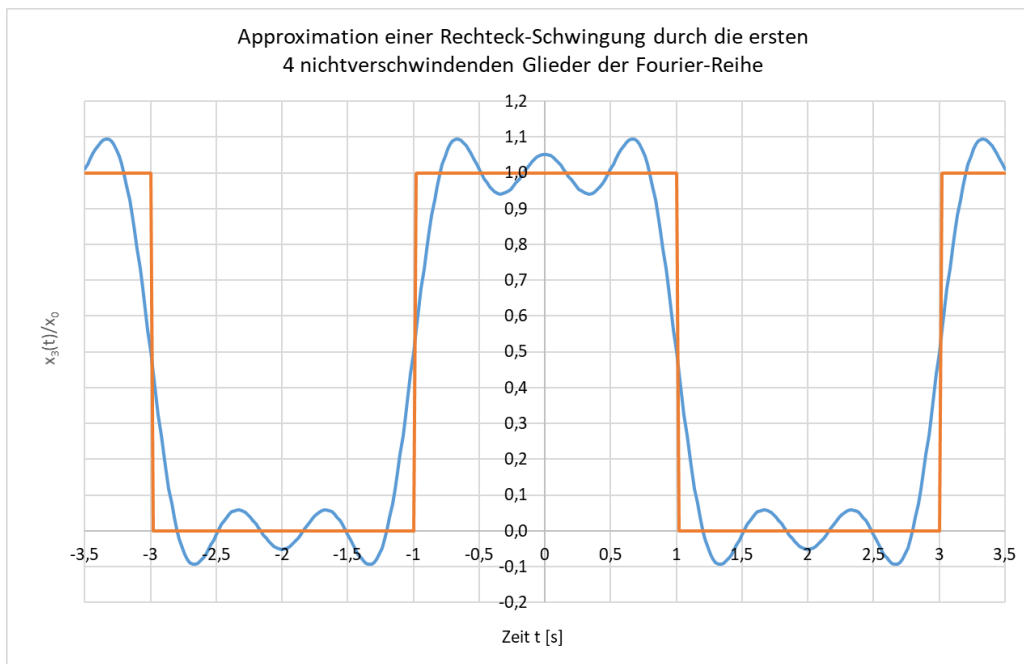


Abbildung 9: Die ersten 4 Glieder der Fourier-Reihe einer Rechteckschwingung

Abbildung 10 zeigt die ersten 11 nichtverschwindenden Glieder. Die steilen Flanken werden bereits recht gut approximiert, an den Ecken entsteht das bekannte Überschwingen.

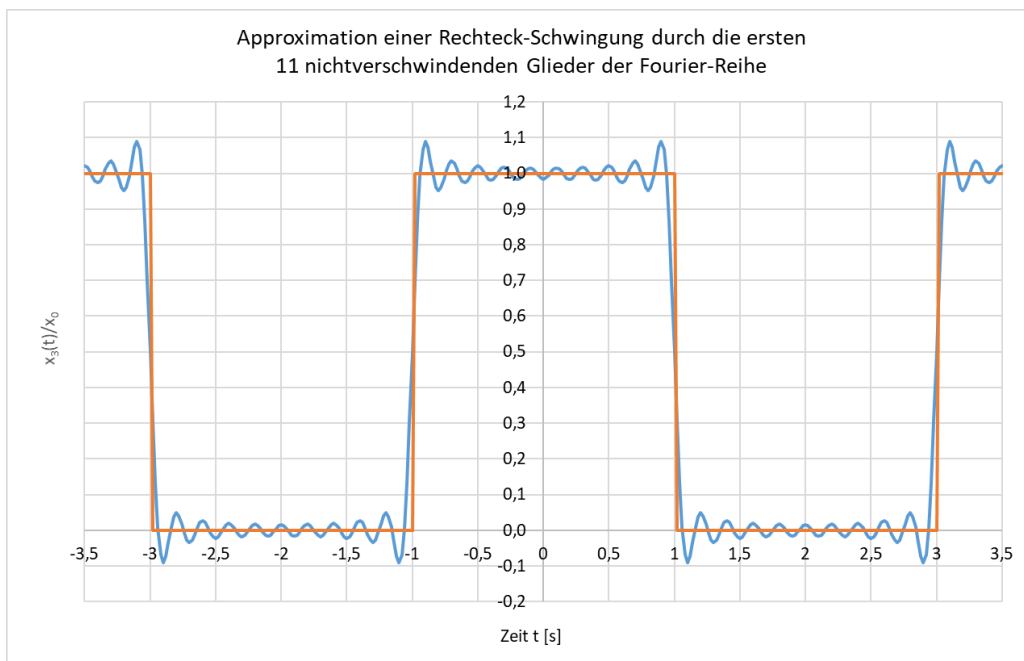


Abbildung 10: Die ersten 11 Glieder der Fourier-Reihe einer Rechteckschwingung

In der Abbildung 11 wurden die ersten 30 (!) nichtverschwindenden Glieder berücksichtigt. Das Überschwingen an den Ecken ist nach wie vor erstaunlich hoch. Die steilen Flanken werden sehr gut approximiert.

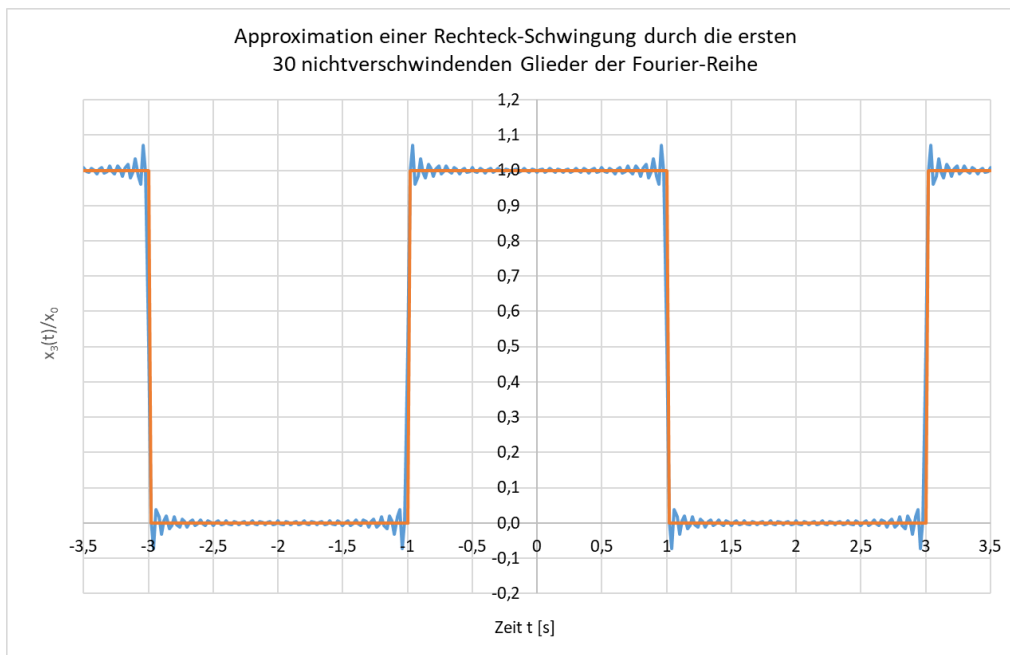


Abbildung 11: Die ersten 30 Glieder der Fourier-Reihe einer Rechteckschwingung

Auch wenn man mehr als 30 Glieder der Fourier-Reihe betrachtet, ändert sich die Höhe des Überschwingens nicht; die Ausschläge rutschen lediglich immer weiter an den Rand des Rechteckimpulses. (Gibbsches Phänomen)

Leistungsbilanz – Theorem von Parseval

Die mittlere Leistung der periodischen Rechteckschwingung ist:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} x^2(t) \cdot dt = \frac{x_0^2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 dt = \frac{x_0^2}{2}$$

Dieselbe mittlere Leistung muss nach Gl (11) von allen Komponenten der Fourier-Reihe zusammen ebenfalls erbracht werden.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k^2 + b_k^2)}{2} = \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot x_0^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot (2k-1)^2} = \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{2 \cdot x_0^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ &= \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{2 \cdot x_0^2}{\pi^2} \cdot \mathbf{8} = \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0^2}{2} \end{aligned}$$

Dabei wurde die von Euler gefundene Summe der reziproken Quadratzahlen benutzt und nach geraden und ungeraden k sortiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = S_u + S_g$$

Die Summe S_g der Reziproken der geraden Quadratzahlen lässt sich auch so schreiben:

$$S_g = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{1}{4} \cdot S$$

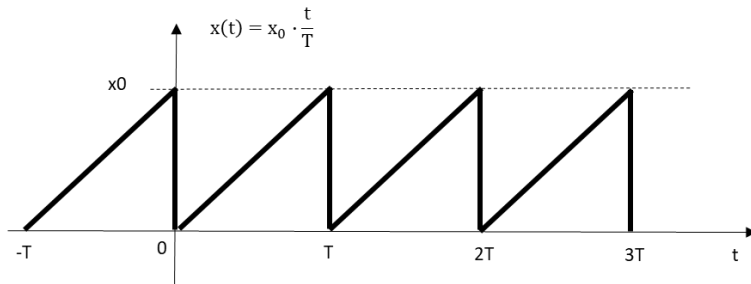
Daraus folgt

$$S = S_u + S_g = S_u + \frac{1}{4} \cdot S \Rightarrow S_u = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{und} \quad S_g = \frac{\pi^2}{24}$$

Der große Unterschied liegt im ersten Summanden, der bei den ungeraden = 1, bei den geraden aber nur $\frac{1}{4}$ ist.

2.5.2 Beispiel Sägezahn-Schwingung

Wir berechnen die komplexen und reellen Fourier-Koeffizienten der folgenden Sägezahn-Funktion:



Man kann hier bereits vermuten, dass die a_k (bis auf a_0) verschwinden werden, da die um $x_0/2$ nach unten verschobene Kurve eine ungerade Funktion ist, die keine geraden Cos-Anteile enthalten kann. Die folgende Rechnung bestätigt das sofort.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x_0}{T} \cdot t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt$$

Für $k=0$ wird:

$$c_0 = \frac{x_0}{T^2} \int_0^T t \, dt = \frac{x_0}{2}$$

Mit dem Grundintegral

$$\int x \cdot e^{-ax} dx = -\frac{(ax + 1) \cdot e^{-ax}}{a^2} + C \quad a = jk\omega_0$$

Können wir die weiteren c_k für $k > 0$ berechnen:

$$c_k = -\frac{x_0}{T^2} \left[\frac{jk\omega_0 T + 1}{-k^2 \omega_0^2} - \frac{1}{-k^2 \omega_0^2} \right] = 0 + j \frac{x_0}{2\pi k}$$

Wir stellen die Fourier-Reihe mit ihren ersten 4 Gliedern grafisch dar, also den Ausdruck

$$x_4(t) = x_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\pi} - \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3\pi} \right)$$

Auch hier ist zu beobachten, dass verkürzte Reihe an den Sprungstellen immer durch den Mittelwert verläuft.

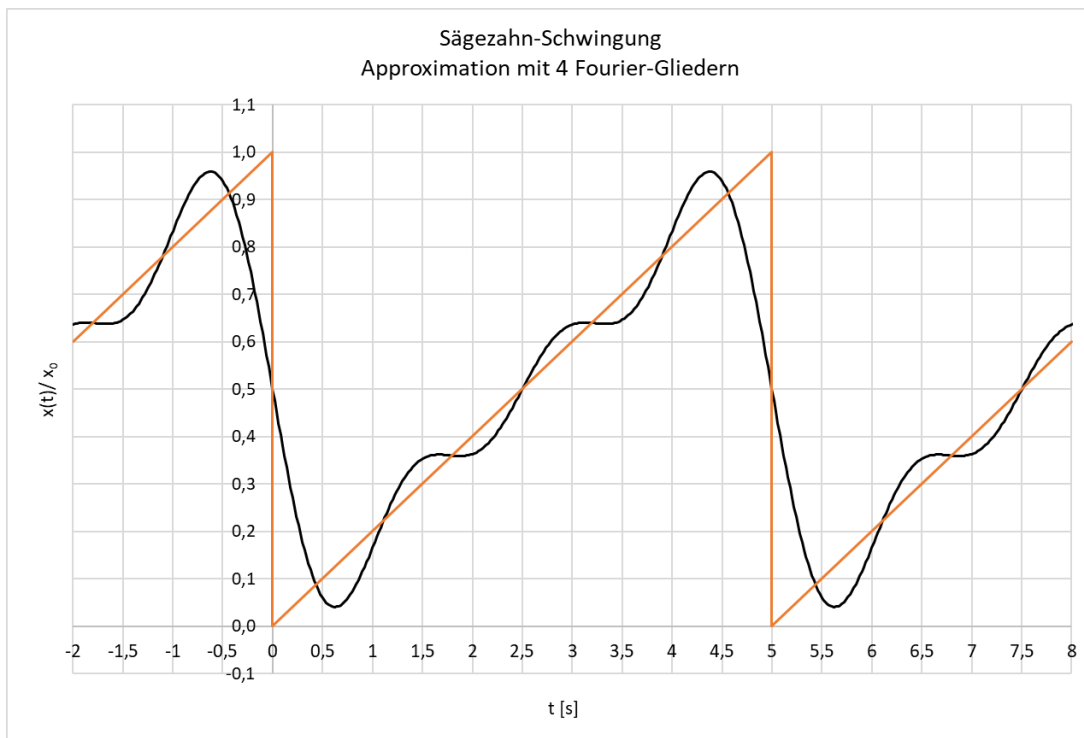


Abbildung 12: Die ersten 4 Glieder der Fourier-Reihe einer Sägezahn-Schwingung

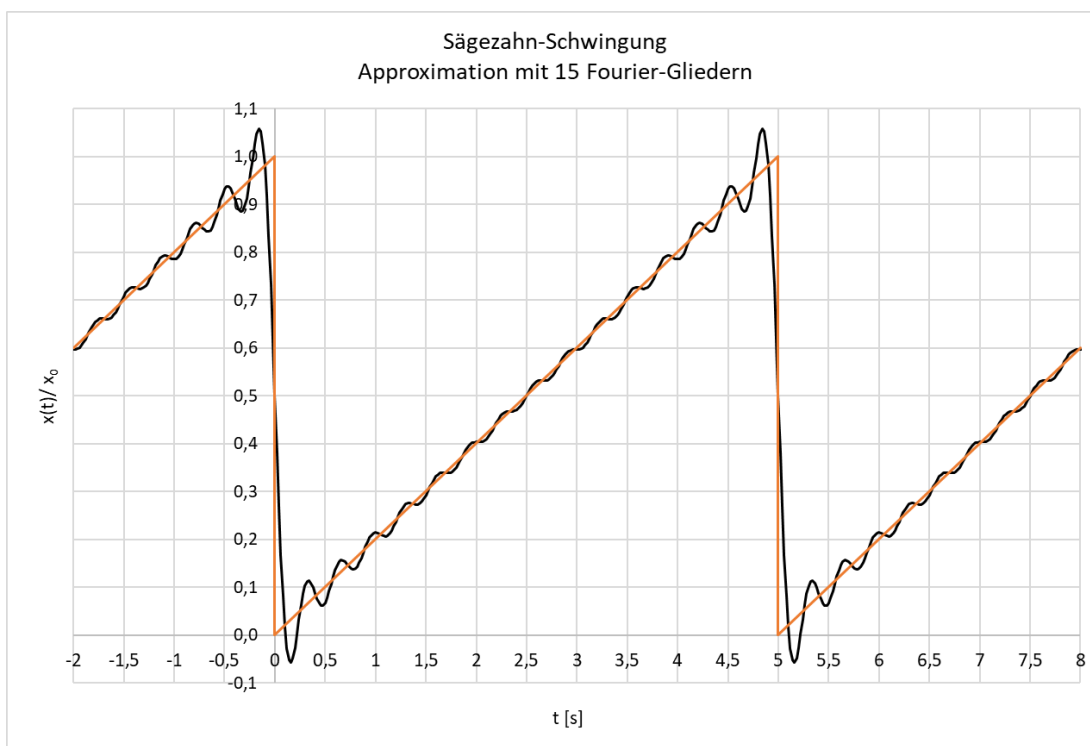


Abbildung 13: Die ersten 15 Glieder der Fourier-Reihe einer Sägezahn-Schwingung

Abbildung 14 zeigt die Approximation des Sägezahns durch die ersten 30 Glieder der Fourier-Reihe. Auch hier ist das Überschwingen an den Ecken noch stark vorhanden.

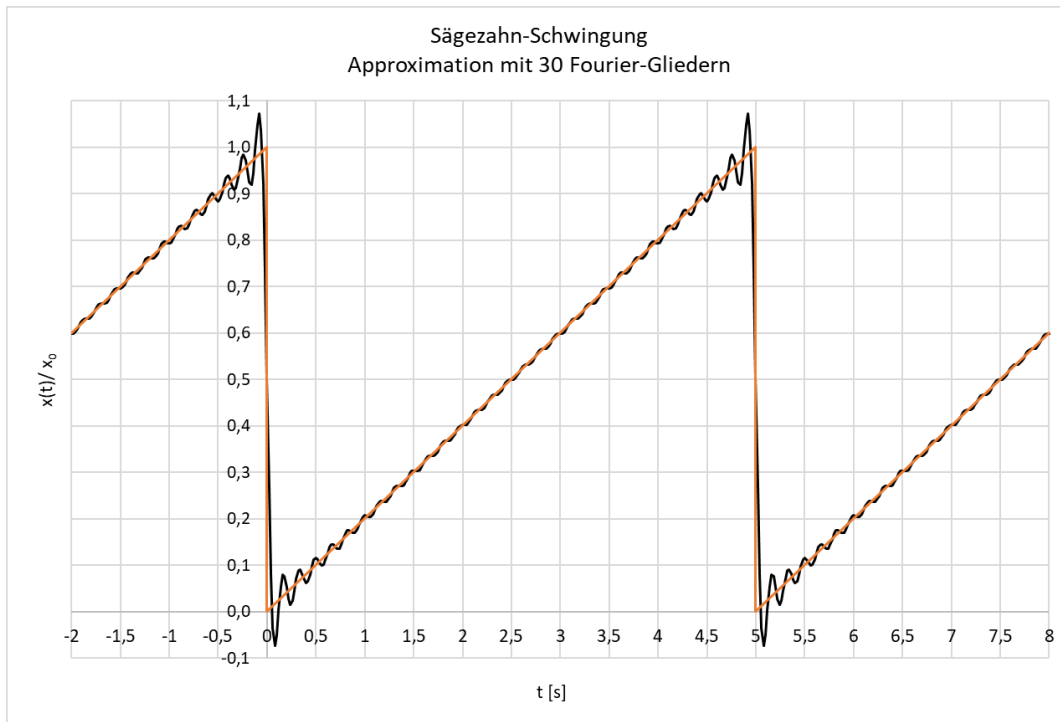


Abbildung 14: Die ersten 30 Glieder der Fourier-Reihe einer Sägezahn-Schwingung

Auch hier ist das Überschwingen vor und nach den Sprungstellen (Gibbssches Phänomen) gut zu beobachten.

Leistungsbilanz:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{x_0}{T} t \right)^2 dt = \frac{x_0^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{x_0^2}{3}$$

BEACHTE:

Die mittlere Leistung ist nicht etwa das Quadrat des Mittelwertes; dieser könnte ja auch =0 sein.

Mit Gl (13) bekommen wir dasselbe

$$\bar{P} = c_0^2 + \frac{x_0^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = x_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right) = x_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = \frac{x_0^2}{3}$$

Dabei haben wir wieder die von Euler gefundene unendliche Summe der reziproken Quadratzahlen benutzt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3 Nichtperiodische Funktionen – Fourier-Integral

3.1 Vergrößerung der Periode T = Verkleinerung der Grundfrequenz ω_0

Wenn man den Rechteckimpuls aus Abbildung 8 nicht mit der Periode T wiederholt, sondern mit einer vielfach höheren Periode $m \cdot T$, so ist die Grundfrequenz der Analyse:

$$\omega_0^* = \frac{2\pi}{mT} = \frac{\omega_0}{m}$$

Abbildung 15 zeigt das für $m=2$.

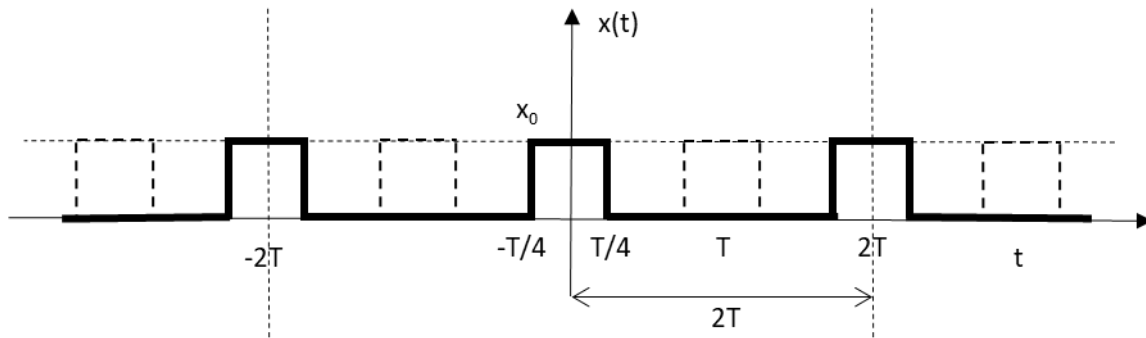


Abbildung 15: Wiederholung eines Rechteckimpulses erst nach $m \cdot T$

Für die Fourier-Koeffizienten bekommen wir:

$$c_0 = \frac{1}{mT} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_0 dt = \frac{x_0}{m}$$

Der Gleichanteil sinkt mit zunehmendem m , da sich ein einziger Impuls auf einen immer größeren Zeitraum verteilt.

$$c_k = \frac{x_0}{mT} \int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0^* \cdot t} dt = \frac{x_0}{mT} \frac{\left(e^{-j \cdot k \cdot \omega_0^* \cdot \frac{T}{4}} - e^{+j \cdot k \cdot \omega_0^* \cdot \frac{T}{4}} \right)}{-j \cdot k \cdot \omega_0^*} = \frac{x_0}{2m} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k}{m} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{k}{m} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{x_0}{2m} \cdot \text{si}\left(\frac{k}{m} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Spaltsinus erreicht seine Nullstellen und Extremstellen jetzt nicht für $k = 1, 2, 3$, sondern für $k=m$, $k=2 \cdot m$, $k=3 \cdot m$. Die Spektrallinien liegen nun um den Faktor m dichter zusammen. Dafür nimmt ihre Amplitude mit m ab.

Die folgende Abbildung zeigt die Spektrallinien für $m=5$, wobei die Amplitude auf 1 normiert wurde. Da die Phase immer nur zwischen 0 und π alterniert, wurde sie zusammen mit dem Betragsspektrum dargestellt. Deshalb enthält die Abbildung auch negative Werte.

Der Verlauf des Spaltsinus ist nun sehr gut zu erkennen.

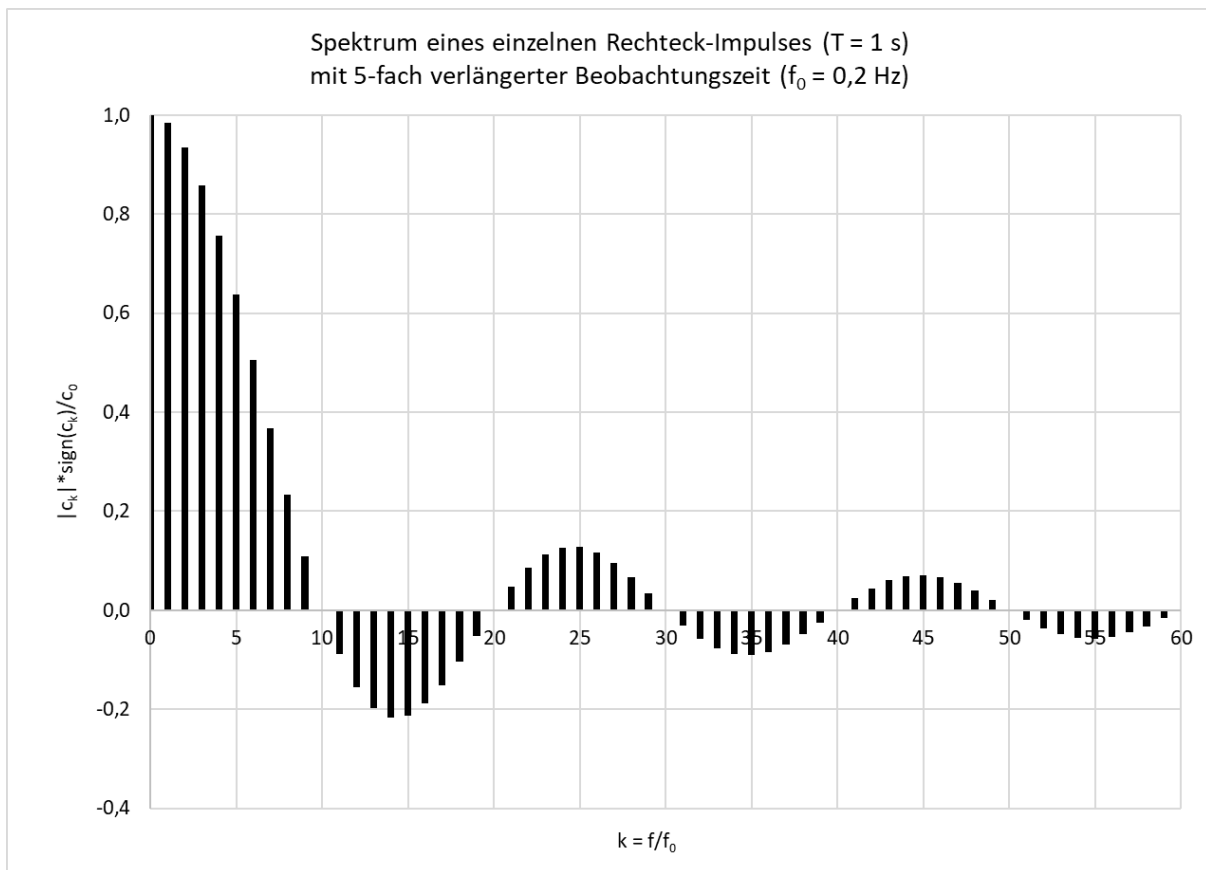


Abbildung 16: Verlängerte Beobachtungsdauer führt zu dichteren Spektrallinien

3.2 Grenzübergang $T \rightarrow \infty$

Wenn man den Übergang zu einer unendlich langen Beobachtungsdauer macht, dann bedeutet das folgende Grenzübergänge

$$T \rightarrow \infty \quad \omega_0 \rightarrow d\omega \quad k \cdot \omega_0 \rightarrow \omega$$

Diesen Grenzübergang führen wir in der Formel für die Fourier-Koeffizienten durch. Da wir bereits wissen, dass die c_k mit immer größer werdendem T gegen Null gehen, ziehen wir T auf die linke Seite zu c_k :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_k \cdot T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(\omega)$$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	14
---	----

$X(\omega)$ ist die komplexe Amplitudendichte (=Spektraldichte) des Vorganges $x(t)$. Damit dieses Integral existiert, muss der Vorgang entweder zeitbegrenzt sein (Einzelimpuls), oder selbst für $|T| \rightarrow \infty$ so stark gegen Null gehen, dass sein Integral existiert. Die Einheit von $X(\omega)$ ist

$$[X(\omega)] = \frac{[x(t)]}{\text{Hz}}$$

Das bedeutet folgendes: Da der Vorgang nicht periodisch ist, sind die Amplituden aller in ihm enthaltenen Einzelfrequenzen gleich Null. Erst ein Frequenzbereich führt zu einer nichtverschwindenden Amplitude.

Analogie zu diskreten und stetigen Zufallsvariablen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Diskrete Variablen (Würfel, Münzen) haben diskrete Ereignisse mit festen Wahrscheinlichkeiten. Bei stetigen Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines festen Wertes gleich Null. Über die Wahrscheinlichkeitsdichte bekommt man endliche Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine stetige Variable in einem bestimmten Intervall liegt.

Umgekehrt lässt sich jeder (hinreichend begrenzte) zeitliche Vorgang über seine Spektraldichte ausdrücken:

Wenn wir das Produkt $c_k \cdot T$ in die Gleichung für die Zeitfunktion einsetzen, bekommen wir:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (c_k \cdot T) \cdot e^{jk\omega_0 t} =$$

Wieder mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} c_k \cdot T = X(\omega) \quad k \cdot \omega_0 \rightarrow \omega$$

Bekommen wir für die Rücktransformation:

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = \int_{f=-\infty}^{f=+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df$	15
---	----

BEACHTEN:

$X(f)$ ist eine komplexe Zahl, die bei geraden Funktionen $x(t)$ rein reell ist und auch negative Werte annehmen kann. Letzteres bedeutet nicht, dass man eine „negative Amplitude“ hat, sondern dass die Phase 180° beträgt. In die folgende Energiebilanz gehen alle Spektralanteile mit positivem Vorzeichen ein.

3.2.1 Energiebilanz – Theorem von Parseval

Eine mittlere Leistung eines Einzelimpulses ist = Null, man kann aber die Gesamtenergie des Impulses angeben, die sich auch durch Integration über das gesamte Spektrum ergibt:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{f=-\infty}^{f=+\infty} |X(f)|^2 df$$

3.2.2 Amplitudenspektrum eines einzelnen Rechteckimpulses

Anders als im Abschnitt 3.1 gibt es hier keine Periode mehr. Mit $T/2$ (!) bezeichnen wir nun die Impulsbreite.

Wir gehen von Abbildung 15 aus und vollziehen den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$, sodass nur ein Einzelimpuls vorhanden ist -Abbildung 17.

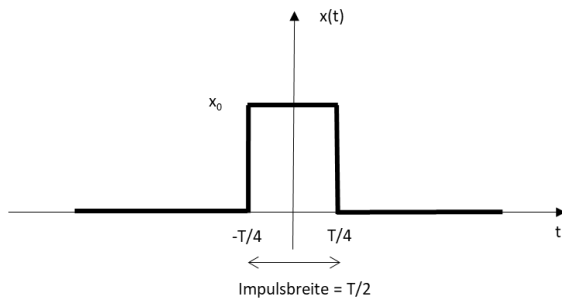


Abbildung 17: Rechteckiger Einzelimpuls der Breite T/2

$$X\left(\omega, \frac{T}{2}\right) = x_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-j\omega t} dt = x_0 \frac{\left(e^{-j\omega \frac{T}{4}} - e^{+j\omega \frac{T}{4}}\right)}{-j \cdot \omega} = x_0 \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin\left(\omega \cdot \frac{T}{4}\right)}{\omega \cdot \frac{T}{4}} = x_0 \frac{T}{2} \cdot \text{si}\left(\omega \cdot \frac{T}{4}\right)$$

Die obige Gleichung ergibt sich aus dem Grenzübergang einer Rechteckschwingung, in der der Rechteckanteil gerade $\frac{1}{2}$ der Gesamtdauer ist. Bei einem Einzelimpuls macht es allerdings wenig Sinn, seine Impulsbreite mit T/2 zu bezeichnen. Deshalb setzen wir in die obige Formel für T/2 jeweils T ein und bekommen das übliche Amplitudenspektrum des Rechteckimpulses der Breite T:

$X(\omega, T) = x_0 \cdot T \cdot \frac{\sin\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right)}{\omega \cdot \frac{T}{2}} = x_0 \cdot T \cdot \text{si}\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad X(f, T) = x_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot f \cdot T)$	16
---	----

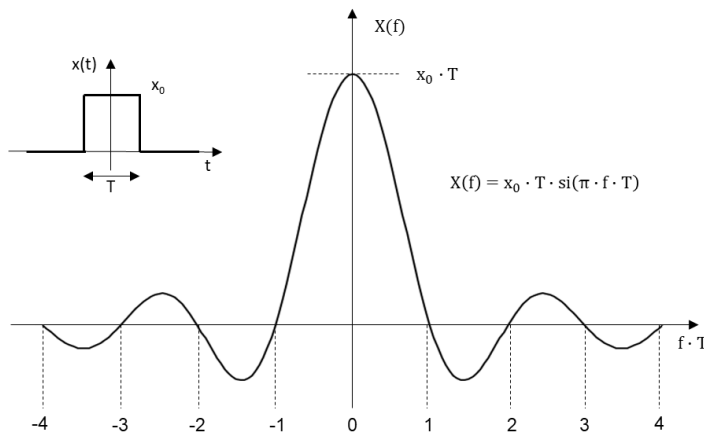


Abbildung 18: Spektraldichte eines einzelnen Rechteckimpulses

Beachte:

es ist nicht der Betrag der Spektraldichte, sondern die Dichte selbst dargestellt, die in diesem Fall rein reell ist. Positive Werte entsprechen reinen Cosinus-Schwingungen, negative Werte entsprechen Cosinus-Schwingungen mit negativem Vorzeichen. Sinus-Anteile tauchen nicht auf, da der Impuls eine gerade Funktion ist.

Häufig verwendet wird der Übergang zu immer schmaleren Rechteckimpulsen bei gleichbleibender Fläche $x_0 \cdot T = K$ (K = Fläche). In diesem Fall rücken die Nullstellen im Spektrum immer weiter auseinander und gehen schließlich gegen ∞ :

$$f_{0k} = \frac{k\pi}{T} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad X(f) = K = \text{const.}$$

17

Das Spektrum eines extrem schmalen Rechteckimpulses ist konstant über alle Frequenzen gleich der Fläche des Impulses. Es zeigt sich, dass dies auch unabhängig von der konkreten Form des Impulses ist. Es könnte auch ein Dreieckimpuls oder eine Sinus-Halbwellen sein. Ein solcher idealer Impuls mit verschwindender Breite, aber unendlicher Höhe bei fester Fläche wird auch als Dirac-Stoß bezeichnet.

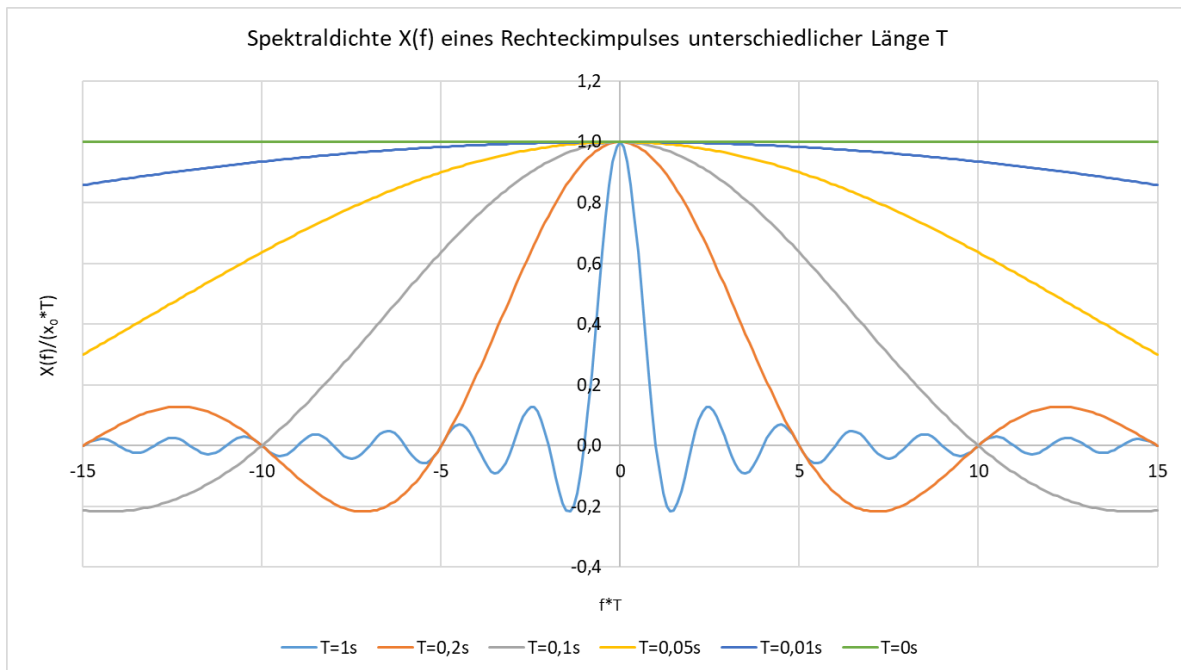


Abbildung 19: Spektrum eines immer schaler werdenden Rechteckimpulses

Energiebilanz:

$$W_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = x_0^2 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt = x_0^2 \cdot T$$

$$W_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = x_0^2 \cdot T^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi \cdot f \cdot T) \cdot df = x_0^2 \cdot T^2 \cdot \frac{1}{T} = x_0^2 \cdot T$$

Der Wert $1/T$ des unbestimmten Integrals über das Quadrat der Spaltfunktion wurde auf www.integralrechner.de berechnet.

3.3 Horizontalverschiebung

3.3.1 Horizontale Verschiebung der Zeitfunktion

Wenn man statt der Zeitfunktion $x(t)$ die um t_0 nach rechts verschobene Funktion $x(t-t_0)$ betrachtet, so wird für deren Spektrum $X_T(f)$:

$$X_T(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

Mit der linearen Substitution $z=t-t_0$ bekommt man sofort:

$ \begin{aligned} X_T(f) &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} x(z) \cdot e^{-j2\pi f \cdot (z+t_0)} \cdot dz \\ &= e^{-j2\pi f \cdot t_0} \int_{z=-\infty}^{+\infty} x(z) \cdot e^{-j2\pi f \cdot z} \cdot dz = e^{-j2\pi f \cdot t_0} \cdot X(f) \end{aligned} $	18
---	----

Durch die Zeitverschiebung erleidet das Spektrum eine frequenzproportionale Phasenverschiebung, was nichts anderes bedeutet, als dass alle Schwingungen des Spektrums um dieselbe Zeit t_0 verschoben werden.

Gl (18) kann hilfreich sein, wenn man durch die horizontale Verschiebung einer Zeitfunktion diese z.B. zu einer geraden oder ungeraden Funktion machen kann, deren Spektrum dann rein reell (oder imaginär) ist und damit leichter berechnet werden kann. Danach ist dann mit dem komplexen Faktor zu multiplizieren.

3.3.2 Horizontale Verschiebung des Spektrums

Ganz analog zur Verschiebung im Zeitbereich kann man eine Verschiebung im Frequenzbereich betrachten und damit vom Spektrum $X(f-f_0)$ ausgehen. Die Zeitfunktion $x_T(t)$ dieses verschobenen Spektrums ist dann:

$x_T(t) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f - f_0) \cdot e^{j2\pi f \cdot t} df = e^{j2\pi f_0 \cdot t} \cdot x(t)$	19
--	----

Man beachte, dass $x_T(t)$ nicht mehr reell ist. Das kommt daher, dass auch negative Frequenzen in den positiven Frequenzbereich verschoben werden, wodurch die Symmetrie des Spektrums bezüglich $f=0$ gestört wird.

Im Abschnitt 10.3 wird als Beispiel die inverse FFT eines verschobenen Spektrums eines Dreieckimpulses berechnet.

4 Anwendung der Fourier-Analyse in der Theorie linearer Systeme

4.1 Lineare Systeme, lineare DLG und komplexe Schwingungen

Lineare System sind solche, bei denen der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße durch lineare Differentialgleichungen beschrieben wird. Oft ist diese Linearität erwünscht (bei elektrischen Schaltungen oder bei Messsystemen). Manchmal kann die Linearität auch nur näherungsweise in der Umgebung eines Arbeitspunktes hergestellt werden.

Auf jeden Fall lassen sich lineare DLG einfach lösen, wobei der Fourier-Analyse eine herausragende Rolle zukommt. Die Ursache dafür liegt in folgenden Beziehungen:

$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega \cdot e^{j\omega t} = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t} = \omega \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$	20
---	----

$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{\omega} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$	21
---	----

$x_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + x_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = (x_1 e^{j\varphi_1} + x_2 e^{j\varphi_2}) \cdot e^{j\omega t} = (X_1 + X_2) \cdot e^{j\omega t}$	22
---	----

Wenn man eine komplexe Schwingung (oder einfach Cosinus- oder Sinus-Funktionen) ableitet oder integriert, so entstehen wieder Funktionen derselben Frequenz. Lediglich der Betrag und die Phasenlage der Schwingung ändern sich.

Bei der Ableitung wird der Betrag mit ω multipliziert und die Phase wird konstant um $\pi/2$ verschoben. Bei der Integration wird der Betrag der Schwingung durch ω dividiert; die Phasenverschiebung beträgt konstant $-\pi/2$.

Eine Linearkombination zweier komplexer Schwingungen mit eigener Amplitude und eigener Phasenlage, aber mit gleicher Frequenz liefert wieder eine Schwingung derselben Frequenz. Betrag und Phase der resultierenden Schwingung lassen sich per komplexer Addition finden. (Dabei braucht man sich „nicht ständig im Kreis zu drehen“, man kann die Addition der komplexen Zeiger X_1 und X_2 in Ruhe in der komplexen Ebene erledigen. Das Ergebnis dreht sich dann wieder...).

Als Beispiel eines linearen Systems betrachten wir einen Reihen-Schwingkreis, bestehend aus ohmschem Widerstand R , Induktivität L und Kondensator C - Abbildung 20.

Die Eingangsspannung $u_e(t)$ erzeugt einen Strom $i(t)$, der durch alle drei Bauelemente fließt.

Die interessierende Ausgangs-Spannung u_a entsteht erst durch Aufladung des Kondensators, ist also dem Stromintegral proportional. Durch Ableitung bekommen wir daraus eine Gleichung für $i(t)$:

$$u_a(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \cdot \dot{u}_a(t)$$

Im Widerstand R erzeugt dieser Strom die Spannung $u_R(t)$.

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = CR \cdot \dot{u}_a(t)$$

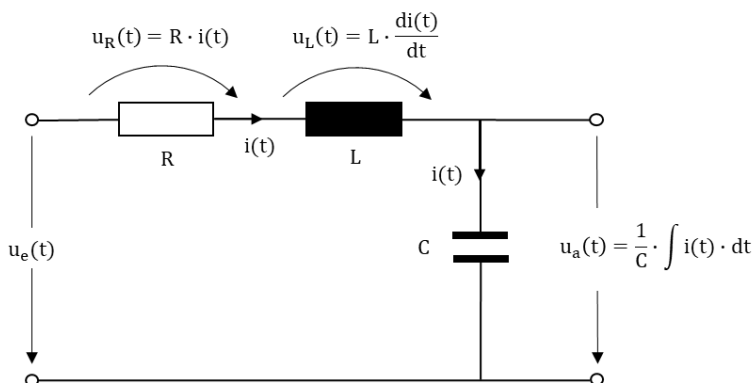


Abbildung 20: Reihen-Schwingkreis als Beispiel eines linearen Systems

Die Spannung $u_L(t)$ über der Induktivität ist auf Grund des Induktionsgesetzes der Ableitung des Stromes proportional.

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \cdot \ddot{u}_a(t)$$

Für die Eingangsspannung gilt der Maschensatz:

$$u_e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_a(t) = CR \cdot \dot{u}_a(t) + LC \cdot \ddot{u}_a(t) + u_a(t)$$

Durch Weglassung der Zeitabhängigkeit (t) bekommen wir die Differentialgleichung, die das System „Schwingkreis“ beschreibt:

$$u_e = LC \cdot \ddot{u}_a + CR \cdot \dot{u}_a + u_a$$

Ähnliche lineare DLG kommen in vielen anderen Bereichen, z.B. in der Mechanik und der Akustik vor. Um den allgemeinen Systemgedanken zu betonen, schreiben wir für $u_e(t)$ einfach wieder allgemein $x(t)$ und für das Ausgangssignal $u_a(t)$ allgemein $y(t)$

Damit heißt die System-DLG:

$x = LC \cdot \ddot{y} + CR \cdot \dot{y} + y$	23
--	----

4.2 Lösung der linearen System-DLG mittels komplexer Fourier-Analyse

Nun legen wir an den Eingang des Systems die folgende komplexe Schwingung an:

$\hat{x}e^{j(\omega t + \varphi_x)} = \hat{x}e^{j\varphi_x} \cdot e^{j\omega t} = X \cdot e^{j\omega t}$	24
--	----

Nach dem oben Gesagten erwarten wir, dass am Ausgang die Schwingung

$\hat{y}e^{j(\omega t + \varphi_y)} = \hat{y}e^{j\varphi_y} \cdot e^{j\omega t} = Y \cdot e^{j\omega t}$	25
--	----

mit derselben Frequenz, aber geänderter Amplitude und Phase auftritt. Wenn wir beide Gleichungen in Gl (23) einsetzen, dann bekommen wir unter Beachtung der Differentiations-Regel nach Gl (20):

$$\begin{aligned} X \cdot e^{j\omega t} &= LC \cdot (j\omega)^2 \cdot Y \cdot e^{j\omega t} + j\omega \cdot CR \cdot Y \cdot e^{j\omega t} + Y \cdot e^{j\omega t} \\ &= [(1 - LC \cdot \omega^2) + j\omega \cdot CR] \cdot Y \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Da die zeitabhängige komplexe Schwingung bei X und Y dieselbe ist, fällt sie aus der Gleichung heraus, und wir haben eine Gleichung zwischen den (stehenden) Zeigern X und Y:

$Y(\omega) = \frac{1}{(1 - LC \cdot \omega^2) + j\omega CR} \cdot X = G(\omega) \cdot X(\omega)$	26
--	----

Der komplexe Ausdruck $G(\omega)$ wird als komplexer Übertragungsfaktor des Systems bezeichnet. Er bewertet jede aufgeprägte harmonische Schwingung nach Betrag und Phase entsprechend ihrer

Schwingungs-Frequenz. Deshalb werden auch die technischen Begriffe Frequenzgang und Phasengang verwendet.

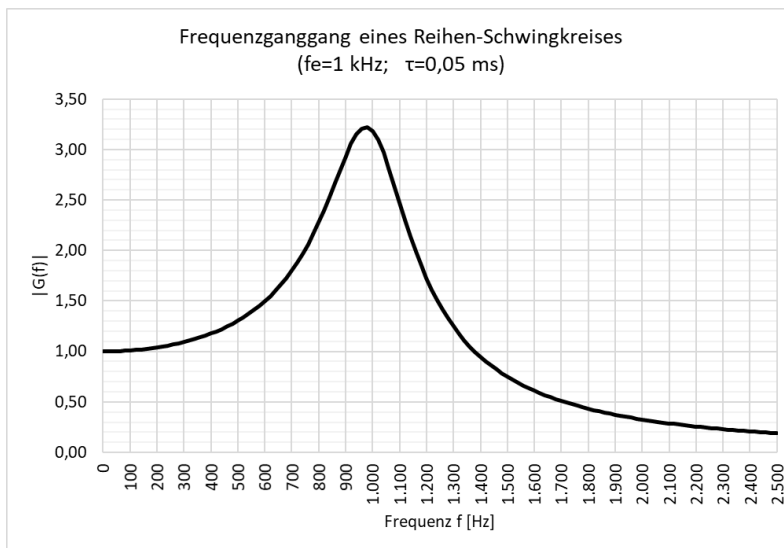


Abbildung 21: Frequenzgang des Reihen-Schwingkreises

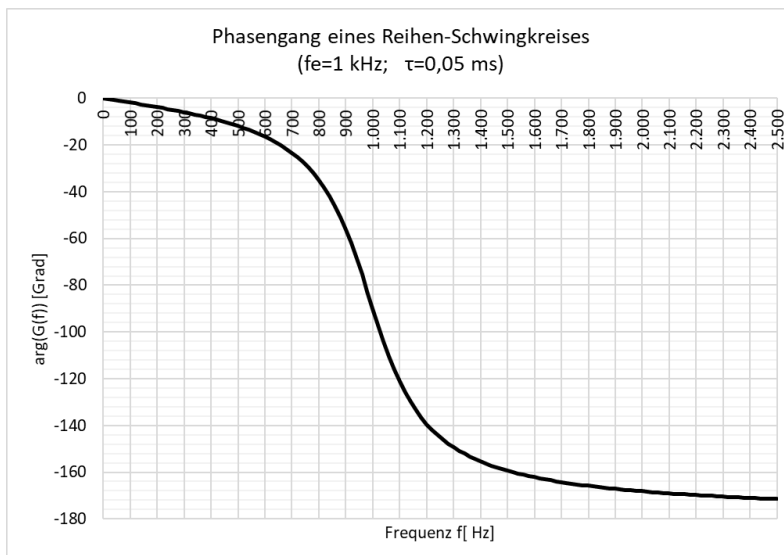


Abbildung 22: Phasengang des Reihen-Schwingkreises

Wenn man nun das System statt mit einer einzelnen Schwingung mit einer periodischen Funktion (Periode T) erregt, dann bekommt man am Ausgang wieder eine periodische Funktion mit derselben Periode T - Abbildung 23.

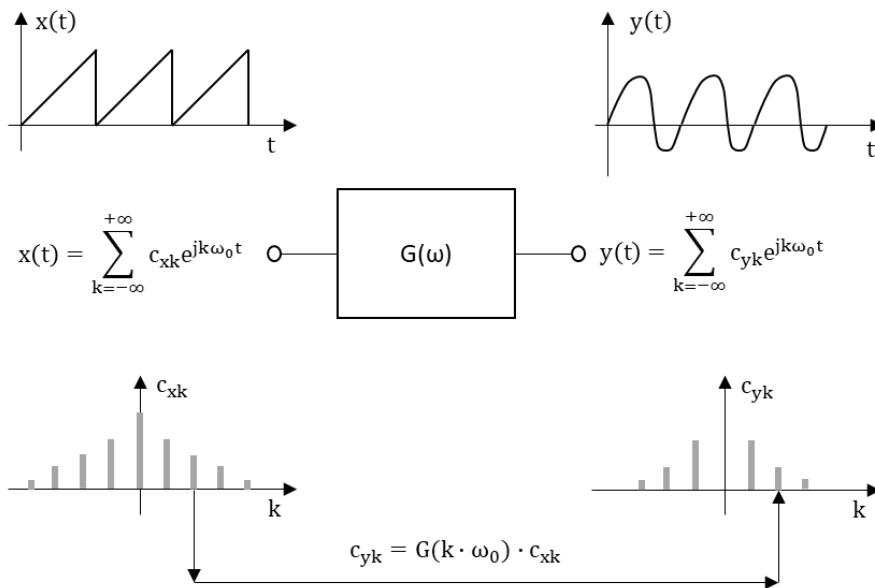


Abbildung 23: Periodische Funktion beim Durchgang durch ein lineares System

Die komplexen Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihen von Eingangs- und Ausgangsfunktion hängen ebenfalls über den Frequenzgang zusammen:

$$c_{yk} = G(k \cdot \omega_0) \cdot c_{xk}$$

Jede Fourier-Linie wird beim Durchgang durch das System für sich mit ihrer Frequenz bewertet.

Und auch der Übergang zu nichtperiodischen Funktionen ergibt sich sofort. Die Spektraldichten $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ hängen ebenfalls einfach multiplikativ über den Frequenzgang zusammen Abbildung 24:

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot X(\omega)$$

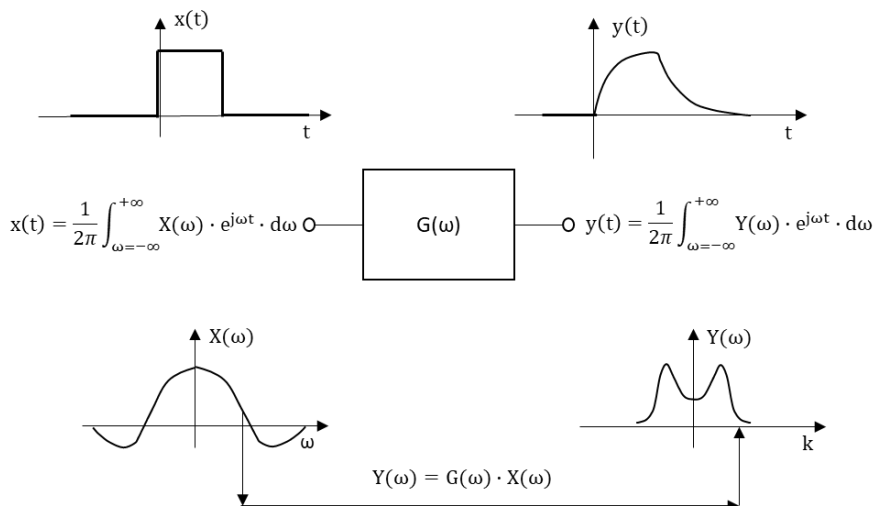


Abbildung 24: Zeitbegrenzte Funktion beim Durchgang durch ein lineares System

Ein Sonderfall entsteht dann, wenn man das System mit einem sehr kurzen Impuls erregt. Dieser hat nach Abbildung 19 eine konstante Spektraldichte, die gerade der Impulsfläche entspricht. Wenn wir diese Fläche zu Eins annehmen, dann bekommt das Ausgangssignal genau die Spektraldichte, die der Übertragungsfunktion des Systems entspricht.

$$X(f) = 1 \Rightarrow Y(f) = G(f) \Rightarrow y(t) = g(t)$$

Die Rücktransformierten $g(t)$ der komplexen Übertragungsfunktion wird auch als „Stoßantwort“ des Systems bezeichnet. Im Kapitel zur FFT werden wir die inverse FFT durchführen, um die Stoßantwort des Systems zu berechnen.

4.3 Hinweis auf die komplexe Wechselstromrechnung

Für technische Anwendungen wird noch erwähnt, dass man zur Berechnung eines Frequenzganges einer linearen Schaltung nicht immer erst die DLG zu ermitteln braucht. Man führt stattdessen für Induktivität und Kapazität sog. komplexe Widerstände ein, die die komplexen Operationen Differentiation und Integration bedeuten:

$$Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad Z_R = R$$

Für diese Widerstände gelten dieselben Regeln, wie sie für rein ohmsche Widerstände gelten: Maschensatz, Knotenpunktsatz, Spannungs- und Stromteiler-Regel. Bei der Rechnung muss man lediglich mit den komplexen Werten rechnen.

So bekommt man nach dem Spannungsteiler-Regel (Teilspannung: Gesamtspannung = Teilwiderstand: Gesamtwiderstand) im o.g. Beispiel für $G(\omega)$ sofort das oben über die DLG abgeleitete Ergebnis.

$$\frac{U_a}{U_e} = G(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{(1 - LC \cdot \omega^2) + j\omega \cdot CR}$$

5 Abtastung und Periodifizierung

5.1 Allgemeines

Bei der Abtastung geht es technisch um die sog. Puls-Amplituden-Modulation, bei der ein stetiges Signal zu äquidistanten Zeitpunkten mit kurzen Impulsen abgetastet wird. Die Höhe der Impulse ist dem Signalwert proportional.

Hier werden die mathematischen Grundlagen dafür aus Ingenieur-Sicht besprochen.

Wir leiten ab, wie sich die Abtastung eines Zeitsignals auf dessen Spektrum auswirkt und welche Voraussetzungen (Bandbegrenzung) gegeben sein müssen, damit das Signal durch seine Tastwerte eindeutig beschrieben (=rekonstruiert) werden kann.

Es wird sich zeigen, dass eine Abtastung nicht nur im Zeitbereich möglich ist, sondern dass es auch eine Abtastung einer Spektraldichte geben kann.

5.2 Abtastfunktion: Dirac-Stoß und Dirac-Kamm

Wir betrachten den einfachsten Fall eines schmalen Rechteckimpulses der Breite ε , dessen Höhe aber gleich $1/\varepsilon$ ist. Seine Fläche ist also = 1.

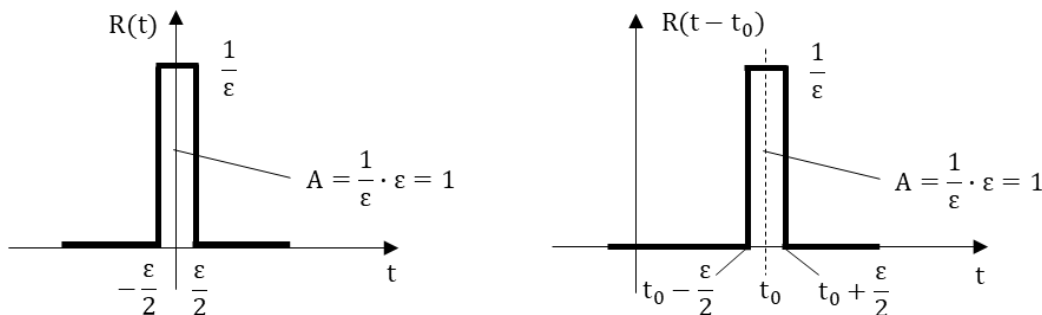


Abbildung 25: Schmalere Rechteck-Impuls im Ursprung und verschoben

Der sog. Dirac-Stoß (Dirac-Impuls) ist der Grenzwert des schmalen Rechteck-Impulses für $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

BEACHTEN:

Bei Abtastung im Zeitbereich ist ε eine Zeit, die die Impulshöhe hat mit $1/\varepsilon$ die Einheit s^{-1} .

Das Spektrum $X(f)$ des Einzelimpulses ergibt sich zu

$$X_R(f) = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt = \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \varepsilon)}{\pi \cdot f \cdot \varepsilon} = \text{si}(\pi \cdot f \cdot \varepsilon)$$

Dieses Ergebnis hatten wir in Gl () bereits abgeleitet, wobei der Impuls dort eine feste Höhe hatte. Da die Impulshöhe hier = $1/\varepsilon$ ist, ist das Spektrum einheitenlos, und für den Grenzwert bekommen wir:

$X_\delta(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_R(f) = \text{si}(0) = 1$	27
--	----

Die Spektraldichte des Dirac-Impulses bei $t=0$ ist konstant = 1 über alle positiven und negativen Frequenzen hinweg.

Das Spektrum eines um t_0 nach rechts verschobenen Impulses hat dann nach Abschnitt 2.4.5. denselben Betrag, aber eine geänderte Phasenlage:

$X_{\delta, t_0}(f) = X_{\delta}(f) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0}$	28
--	----

Und da die Rücktransformierte von Gl (21) ja wieder der Impuls $\delta(t-t_0)$ sein muss, gilt:

$\delta(t - t_0) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df = \int_{f=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \cdot f \cdot (t-t_0)} \cdot df$	29
--	----

Anschaulich ist Gl (22) einleuchtend: Überall auf der Zeitachse, wo $t \neq t_0$ ist, ist das Integral = 0; für $t=t_0$ ist es unendlich groß.

Natürlich ist das Integral über einen Dirac-Stoß unabhängig von seiner konkreten Position t_0 gleich 1, da ja seine Fläche = 1 ist.

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot dt = 1$$

Multipliziert man eine stetige Zeitfunktion mit einem Dirac-Stoß, so existiert das Produkt nur an der Stelle $t=t_0$ und ergibt einen Dirac-Stoß mit geänderter Fläche:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Das Integral über diese Produktfunktion ist dann:

$\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = x(t_0) \cdot \int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot dt = x(t_0)$	30
--	----

Gl (23) beschreibt die sog. Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses.

Nun besteht die Abtastfunktion $a(t)$ aber nicht aus einem Einzelimpuls, sondern aus einer äquidistanten Folge von Dirac-Stößen zu den Zeitpunkten $t=n \cdot \Delta t$, einem sog. Dirac-Kamm.

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

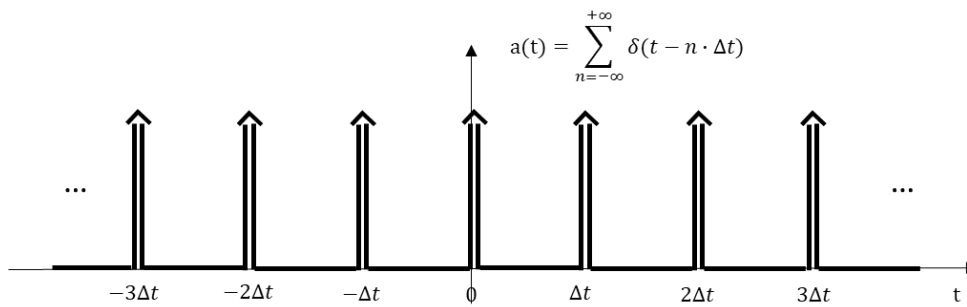


Abbildung 26: Dirac-Kamm als Folge äquidistanter Dirac-Impulse

Für die Spektraldichte $A(f)$ der Abtastfunktion $a(t)$ bekommt man:

$$A(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

Oder nach Vertauschung von Summe und Integral und durch Anwendung der Ausblendeigenschaft:

$A(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \cdot f \cdot n \cdot \Delta t}$	31
---	----

Gl (24) stellt die mehrfache Anwendung von Gl (28) für $t_0 = n \cdot \Delta t$ dar.

Da der Dirac-Kamm nach Abbildung 26 ja auch eine periodische Funktion darstellt, kann man für ihn auch eine Fourier-Reihe berechnen. Für deren c_k bekommt man:

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{\Delta t} \cdot 1 = \frac{1}{\Delta t}$$

Alle Fourier-Koeffizienten haben denselben Wert $1/\Delta t$. Genau wie sonst bei normalen Signal-Funktionen haben die c_k dieselbe Einheit wie die periodische Funktion. Beim Dirac-Impuls ist die Einheit eben s^{-1} .

Die Fourier-Reihe des Dirac-Kammes lautet daher mit $f_a = 1/\Delta t$:

$a(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \cdot k \cdot f_a \cdot t}$	32
--	----

5.3 Abtastung im Zeitbereich = periodische Fortsetzung im Frequenzbereich

Durch Abtastung werden aus stetigen Verläufen zeitabhängiger physikalischer Größen diskrete Zeitreihen gewonnen. Die zentrale Größe dabei ist die sog. Abtastfrequenz f_a . Sie ist das Reziproke der Abtastzeit Δt (= zeitlicher Abstand zweier benachbarter Abtastwerte)

$$f_a = \frac{1}{\Delta t}$$

Die folgende Abbildung zeigt, wie die Abtastwerte gewonnen werden.

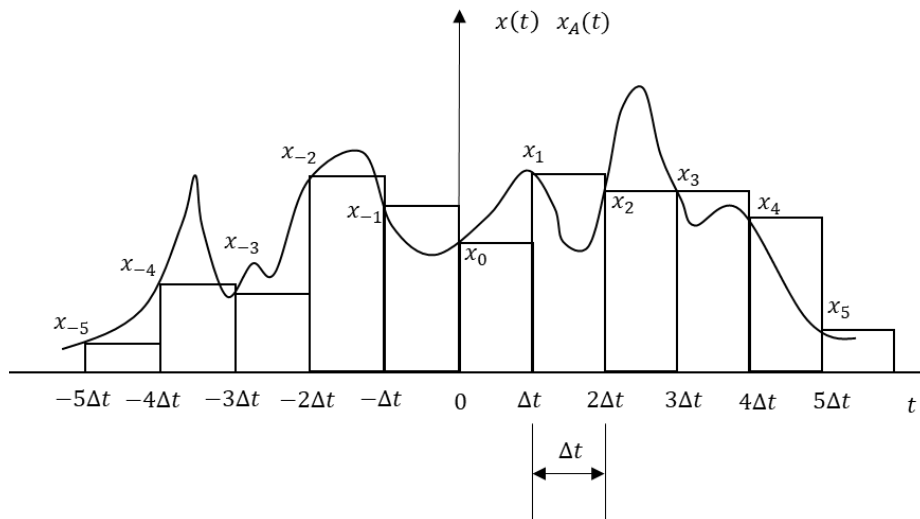


Abbildung 27: Abtastung eines stetigen Zeitsignals

Zunächst ist die Breite des Abtast-Impulses gleich der Abtastzeit Δt und die Höhe ist gleich dem Funktionswert $x(n \cdot \Delta t)$. Die Impulsfläche ist $\Delta t \cdot x(n \cdot \Delta t)$. Danach vollzieht man den Übergang zu immer kleineren Impulsbreiten $\Delta t \cdot \varepsilon$ bei steigender Höhe $x(n \cdot \Delta t) / \varepsilon$ bei konstanter Impulsfläche. Damit lautet die Gleichung der abgetasteten Funktion für $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta t \cdot x(n \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \cdot k \cdot f_a \cdot t}$$

Für den Dirac-Kamm haben wir dabei seine Reihen-Entwicklung nach Gl (32) eingesetzt, wodurch sich der Faktor Δt herauskürzt.

Das Spektrum des abgetasteten Signals wird damit:

$$X_a(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \cdot k \cdot f_a \cdot t} \right] \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot (f - k \cdot f_a) \cdot t} \cdot dt$$

Das Integral in der letzten Gleichung ist aber gerade die Transformierte des stetigen Originalsignals, allerdings periodisch wiederholt bei den Frequenzen $k \cdot f_a$.

$X_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k \cdot f_a) =$	33
--	----

Die Gl (33) ist von allergrößter Wichtigkeit für das Verständnis der Zusammenhänge beim Abtasten im Zeitbereich. Sie sagt aus, dass durch Abtastung das Spektrum des abgetasteten Signals periodisch mit der Abtastfrequenz wiederholt wird. Diese Gleichung gilt unabhängig davon, ob das Spektrum

$X(f)$ begrenzt ist oder nicht. Wie die folgende Abbildung zeigt, gibt es prinzipiell drei verschiedene Fälle für eine mögliche obere Bandbegrenzung f_{\max} des abgetasteten Signals:

- $f_{\max} < f_a/2$
Dieser Fall ist der technisch realisierbare Fall, das Grundband in der Umgebung von $f=0$ kann von den oberen Frequenzbändern, die durch die Abtastung entstehen, per Tiefpass getrennt werden.
- $f_{\max} = f_a/2$
Grenzfall, an dem die verschiedenen Frequenzbänder gerade nicht überlappen. Das Originalsignal kann per idealem Tiefpass rekonstruiert werden (Abtasttheorem)
- $f_{\max} > f_a/2$
Die Abtastfrequenz f_a ist so klein in Relation zu f_{\max} , dass die Frequenzbänder überlappen. Das Originalsignal ist nicht rekonstruierbar. Dieses Überlappen der Frequenzbänder infolge zu niedriger Abtastfrequenz nennt man auch aliasing.

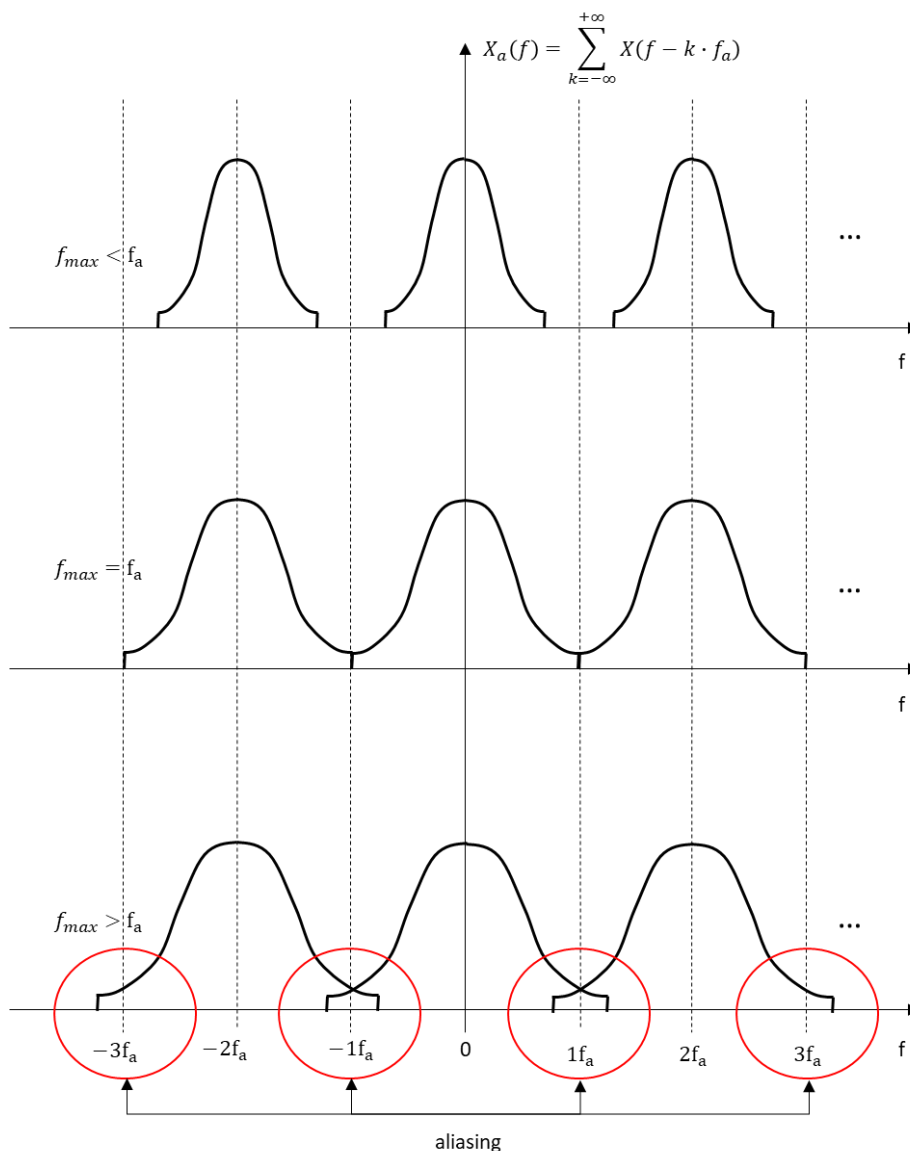


Abbildung 28: Spektrum eines abgetasteten Signals für verschieden Verhältnisse f_a/f_{\max}

Im Abschnitt 2 hatten wir gezeigt, wie man eine in T periodische Zeitfunktion in eine Fourier-Reihe entwickeln kann. Mit dem Spektrum des abgetasteten Signals haben wir nun aber eine periodische Spektralfunktion vorliegen. Mathematisch spricht nichts dagegen, diese Funktion ebenfalls in eine Fourier-Reihe zu entwickeln. Man muss dabei folgende Variablen-Vertauschungen vornehmen:

- Zeitperiode T → Frequenzperiode f_a
- Abstand der diskreten Frequenzen $f_0=1/T$ → Abstand der diskreten Tastzeitpunkte $\Delta t=1/f_a$
- Fourier-Koeffizienten c_k → Fourier-Koeffizienten c_n

Damit kann man für $X_a(f)$ die folgende Fourier-Reihe im Frequenzbereich schreiben:

$$X_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot \Delta t \cdot f} \quad \text{wobei} \quad c_n = \frac{1}{f_a} \int_{f=-f_a/2}^{+f_a/2} X_a(f) \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot \Delta t \cdot f} df$$

Nehmen wir nun den Grenzfall $f_{\max} = f_a/2$ an so erstreckt sich das letzte Frequenzintegral gerade nur über das Basisband $X(f)$:

$c_n = \frac{1}{f_a} \int_{f=-f_a/2}^{+f_a/2} X(f) \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot \Delta t \cdot f} df = \frac{1}{f_a} x(n \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot x_n$	34
--	----

Auch Gl (34) ist bemerkenswert, denn die Fourier-Koeffizienten c_n der Reihenentwicklung des periodischen Spektrums entsprechen (bis auf den Faktor Δt) genau den Abtastwerte x_n !

Damit ist das Spektrum $X(f)$ des auf $[-f_a/2, +f_a/2]$ **bandbegrenzten** Originalsignals $x(t)$ an jeder beliebigen Frequenz f vollständig bestimmt durch die Abtastwerte x_n .

$X(f) = \frac{1}{f_a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot \Delta t \cdot f}$	35
--	----

Und letztlich liefert die Rücktransformation von Gl (35) in den Zeitbereich noch zwanglos das bekannte Abtasttheorem, das den Signalwert $x(t)$ zu jedem beliebigen Zeitwert t darstellt als Interpolation aus den diskreten Tastwerten $x_n=x(n \cdot \Delta t)$:

$$x(t) = \frac{1}{f_a} \int_{f=-f_a/2}^{+f_a/2} X(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \int_{f=-f_a/2}^{+f_a/2} \frac{1}{f_a} e^{j2\pi \cdot f \cdot (t+n\Delta t)} df$$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f_a \cdot (t - n \cdot \Delta t))}{\pi \cdot f_a \cdot (t - n \cdot \Delta t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \text{si}(\pi \cdot f_a \cdot (t - n \cdot \Delta t))$	36
--	----

Gleichung (36) ist das bekannte Abtasttheorem in Zeitbereich nach Kotelnikov und Shannon. Es sagt aus, dass ein mit f_a abgetastetes, stetiges Zeitsignal dann durch seine diskreten Tastwerte $x(n \Delta t)$ vollständig bestimmt ist, wenn seine Bandbegrenzung $f_{\max} \leq f_a$ ist. Durch die Bandbegrenzung ist der innere Zusammenhang zwischen den Funktionswerten so groß, dass die diskreten Tastwerte alle

Werte dazwischen mitbestimmen. Die Spaltsinus-Funktion bildet dabei die Gewichtungsfaktoren, mit denen die Tastwerte $x(n)$ den konkreten Funktionswert $x(t)$ bestimmen. Dabei gehen weiter entfernte Tastwerte mit geringerem Gewicht ein als näher liegende.

Zum Verständnis berechnen wir den Funktionswert $x(m \cdot \Delta t + dt)$, wobei $0 \leq dt \leq \Delta t$ sein soll. Das ist ein Funktionswert zwischen den Abtastwerten x_m und x_{m+1} .

$$\begin{aligned} x(m \cdot \Delta t + dt) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \operatorname{si} \left(\pi \cdot \frac{(m \cdot \Delta t + dt) - n \Delta t}{\Delta t} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \operatorname{si} \left(\pi(m-n) + \pi \frac{dt}{\Delta t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \frac{(-1)^{(m-n)} \cdot \sin \left(\pi \frac{dt}{\Delta t} \right)}{\left(\pi(m-n) + \pi \frac{dt}{\Delta t} \right)} \end{aligned}$$

Speziell für die Werte von $x(t)$ genau in der Mitte zwischen x_m und x_{m+1} , also für $dt = \Delta t/2$, bekommen wir:

$$x \left(m \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{(m-n)}}{(2(m-n) + 1)}$$

Der Gewichtungsfaktor, mit dem der Abtastwert x_n in die Berechnung des Wertes in der Mitte zwischen x_m und x_{m+1} eingeht, ist:

$$GF(m, n) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{(m-n)}}{(2(m-n) + 1)}$$

Da der gesuchte Wert genau in der Mitte zwischen x_m und x_{m+1} liegt, sind die Gewichte von x_m und x_{m+1} gleich (beide sind von dem gesuchten Wert gleich weit entfernt):

$$GF(m, m) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{(0)}}{(2(0) + 1)} = GF(m, m+1) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{(-1)}}{(2(-1) + 1)} = \frac{2}{\pi}$$

Für die übrigen Gewichte der weiter entfernten Tastwerte kann man die ersten Glieder der Summe hinschreiben:

$$x \left(m \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x_{m+1}}{1} - \frac{x_{m+2}}{3} + \frac{x_{m+3}}{5} - \frac{x_{m+4}}{7} + \frac{x_{m+5}}{9} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x_m}{1} - \frac{x_{m-1}}{3} + \frac{x_{m-2}}{5} - \frac{x_{m-3}}{7} + \frac{x_{m-4}}{9} \right)$$

Dabei entsteht die erste Summe für $n > m$, also für die Tastwerte rechts von x_m . Die zweite Summe erfasst die Werte für $n \leq m$, also x_m selbst und alle Werte links davon.

Die Summe aller Gewichte ist gleich 1, was sich leicht prüfen lässt:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} GF(m, n) = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right) = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1$$

Dabei wurde für den Klammerausdruck die Reihenformel der alternierenden harmonischen Reihe für ungerade Glieder verwendet, deren Wert gerade $\pi/4$ ist.

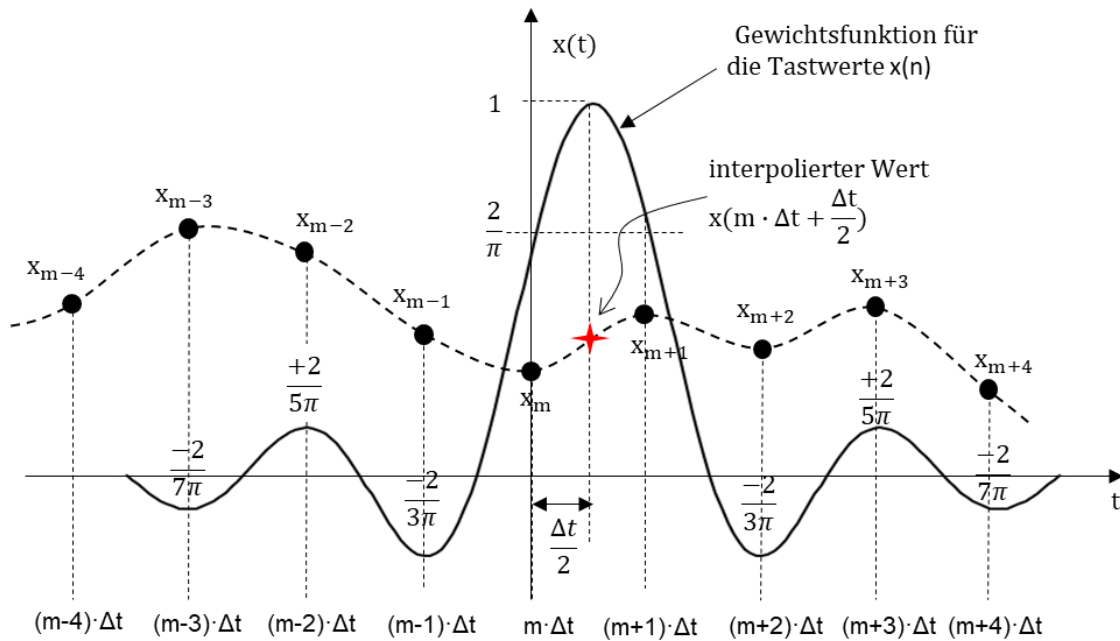


Abbildung 29: Gewichte für den Funktionswert in der Mitte zwischen zwei Abtastwerten

BEACHTE:

Die Gl (36) hat rein mathematischen Charakter. Für eine technische Rekonstruktion eines stetigen Signals aus seinen Abtastwerten ist sie nicht geeignet, da der Funktionswert zum Zeitpunkt t von den nach t kommenden, also zukünftigen Tastwerten abhängt. Bei realen Systemen (z.B. Tiefpassfiltern) hängt der Output stets nur von den Werten in der Vergangenheit ab. Die Gewichtungsfunktion ist einseitig zeitbegrenzt. (Wollte man Gl(36) dennoch für eine Rekonstruktion verwenden, so müsste man eine entsprechend große Verspätung in Kauf nehmen.)

5.3.1 Verletzung der Abtastregel $f_{\max} \leq f_a/2$ – Aliasing

Die folgende Abbildung zeigt im Zeitbereich, wie sich das Abtasten zu schneller Schwingungen auf das Abtastergebnis auswirkt. Dazu tasten wir zwei Sinusfunktionen von 1 Hz und 11 Hz mit derselben Abtastfrequenz $f_a = 10$ Hz ab.

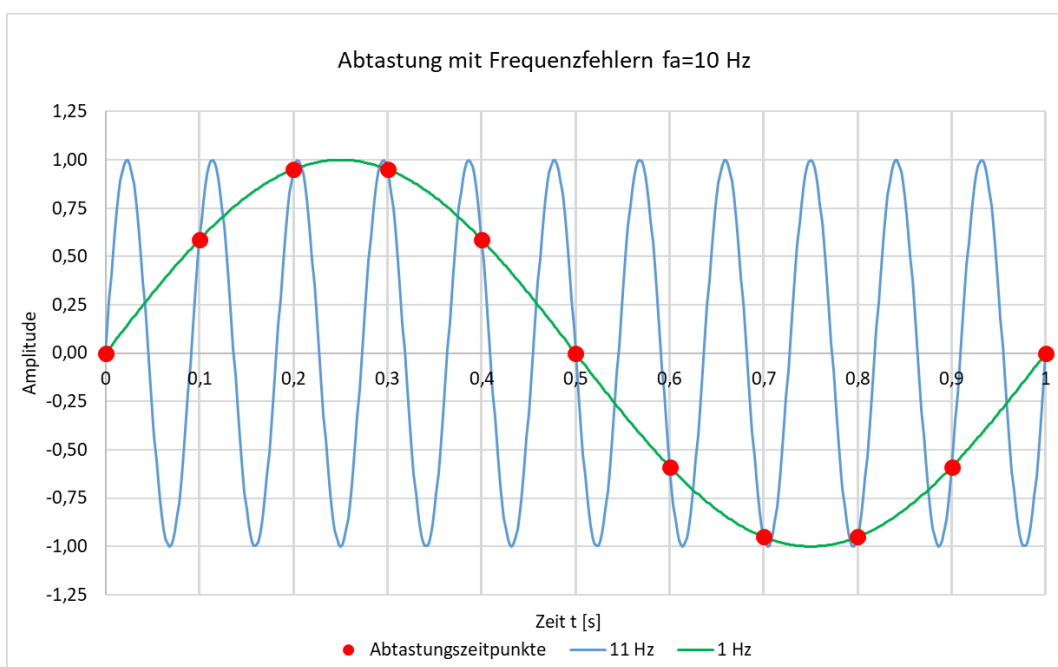


Abbildung 30: Abtastung zu hoher Frequenzen spiegelt niedrige Frequenzen vor

Die roten Abtastzeitpunkte der schnellen Schwingung liegen bei $t=k \cdot \Delta t = k \cdot 0,1$ s. Sie stimmen genau mit den Abtastzeitpunkten und auch mit den Abtastwerten der langsamen Schwingung überein, denn für beliebige n gilt wegen der Periodizität der sin-Funktion:

$$\sin\left(2\pi \cdot 11\text{Hz} \cdot \frac{n}{10\text{Hz}}\right) = \sin\left(2\pi \cdot (10\text{Hz} + 1\text{Hz}) \cdot \frac{n}{10\text{Hz}}\right) = \sin\left(2\pi \cdot 1\text{Hz} \cdot \frac{n}{10\text{Hz}}\right)$$

Falls man nur die Abtastwerte hat, weiß man nicht, ob sie von der schnellen oder der langsamen Schwingung herrühren. (Oder vielleicht sogar von einer Schwingung mit 21 Hz, 31 Hz...) Wäre im zu analysierenden Spektrum nur die Frequenz 11 Hz enthalten, so würde man im Ergebnis der Frequenzanalyse dennoch die Schwingung mit 1 Hz sehen. Diese Doppeldeutigkeit kann offensichtlich nur durch eine Begrenzung der Bandbreite des abgetasteten Signals vermieden werden.

5.4 Abtastung im Frequenzbereich = periodische Fortsetzung im Zeitbereich

Im Abschnitt 2 über die Fourier-Reihen hatten wir dargestellt, dass eine auf das Intervall $[0..T]$ zeitbegrenzte und danach periodisch fortgesetzte Funktion durch ihre diskreten Fourier-Koeffizienten bei den Frequenzen $k \cdot f_0$ vollständig bestimmt ist.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi \cdot k \cdot f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

Die Ursache dafür liegt darin, dass eben an der Bildung einer periodischen Funktion nur solche periodischen Grundbausteine (sin, cos) beteiligt sein können, deren Frequenz ein Vielfaches der Grundfrequenz $f_0=1/T$ ist. Dieses Fourier-Reihe mit ihrem diskreten Spektrum bestimmt demnach die Funktionswerte der Funktion $x(t)$ im gesamten Intervall $[0, T]$ eindeutig. Damit ist auch die Spektraldichte $X(f)$ festgelegt, die aus der zeitbegrenzten (nicht periodisch fortgesetzten) Funktion berechnet werden kann:

$$X(f) = \int_{t=-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

Setzt man die Reihe in die Berechnung der Spektraldichte ein, so bekommt man nach Vertauschung von Integral und Summe:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{t=-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi(f-k \cdot f_0) \cdot t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi(f \cdot T - k))}{\pi(f \cdot T - k)}$$

$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot T \cdot \text{si}(\pi(f \cdot T - k)) \quad \text{speziell: } X(k \cdot f_0) = c_k \cdot T$	37
--	----

Das ist das Analogon zum Abtasttheorem im Frequenzbereich. Es zeigt den Zusammenhang zwischen Fourier-Reihe und Spektraldichte einer zeitbegrenzten Funktion. Die Spektraldichte ist für jeden Frequenzwert f durch die Fourier-Koeffizienten der periodischen Fortsetzung der zeitbegrenzten Funktion vollständig determiniert. Auch hier beschreibt der Spaltsinus die Gewichte, mit denen die

Koeffizienten (=Abtastwerte im Frequenzbereich) in die Spektraldichte einer konkreten Frequenz f eingehen.

BEACHTET:

Auch im Zeitbereich könnte man zunächst zwischen Zeitbegrenzung T_{\max} und Periode T unterscheiden (wie im Frequenzbereich zwischen f_{\max} und f_a). Dann müsste man ebenfalls die drei Fälle $T_{\max} < T$, $T_{\max} = T$ und $T_{\max} > T$ unterscheiden und bekäme für $T_{\max} > T$ eine Art von zeitlichem aliasing. Darauf wollen wir hier verzichten.

6 Multiplikation und Faltung

6.1 Multiplikation im Frequenzbereich = Faltung im Zeitbereich

Im Abschnitt 4 hatten wir gesehen, dass sich das Spektrum $Y(f)$ des Ausgangssignals eines linearen Systems durch Multiplikation des Eingangsspektrums $X(f)$ mit der komplexen Übertragungsfunktion $G(f)$ des Systems berechnet. Und wir hatten auch gesehen, dass die Rücktransformierte der komplexen Übertragungsfunktion $G(f)$ in den Zeitbereich die sog. Stoßantwort $g(t)$ des Systems ist. Diese wird auch Gewichtsfunktion genannt.

Welcher Zusammenhang besteht nun im Zeitbereich zwischen $x(t)$, $y(t)$ und $g(t)$? Es leuchtet ein, dass dies kein einfacher multiplikativer Zusammenhang mehr sein kann, da die zeitlichen Größen ja über Differentialgleichungen zusammenhängen.

Wir schreiben $y(t)$ als Rücktransformierte aus dem Frequenzbereich und die Spektraldichte $X(f)$ als Transformierte in den Frequenzbereich. Bei $X(f)$ verwenden wir als Integrationsvariable zur Unterscheidung vom Zeitpunkt t des Ausgangssignals $y(t)$ die Zeitvariable τ :

$$y(t) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi f t} df = \int_{f=-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad X(f) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Setzt man $X(f)$ in die Gleichung für $y(t)$ ein, so wird

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{f=-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot \left[\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] \cdot e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \left[\int_{f=-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right] \cdot d\tau \end{aligned}$$

Das Integral in den eckigen Klammern ist gerade die Rücktransformierte von $G(f)$, also $g(t)$, aber mit dem geänderten zeitlichen Argument: $t-\tau$.

Damit bekommt man schließlich:

$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$	38
--	----

Gl (38) beschreibt die sog. Faltung im Zeitbereich. Es gilt also: Multiplikation im Frequenzbereich (=Multiplikation der Spektren) bedeutet Faltung im Zeitbereich. Dabei ist die obere Integrationsgrenze $+\infty$, wenn $g(t)$ ein beliebiges Zeitsignal ist.

Ist $g(t)$ aber die Stoßantwort eines realen, linearen Systems, so gilt immer:

$$g(t) \equiv 0 \text{ für } t < 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{\tau=-\infty}^t x(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau$$

39

Der Ausdruck $g(t-\tau)$ bedeutet, dass die Stoßantwort zum Zeitpunkt t gespiegelt wird und nur in die Vergangenheit reicht.

Das erklärt auch den Namen „Gewichtsfunktion“ oder „Gedächtnisfunktion“ für $g(t)$. Gl (39) bedeutet nichts anderes, als dass die Systemantwort nicht vor dem Eingangssignal da sein kann.

Mit Gl (39) kann man durch einfache Integration die Antwort eines Systems auf beliebige Eingangssignale berechnen.

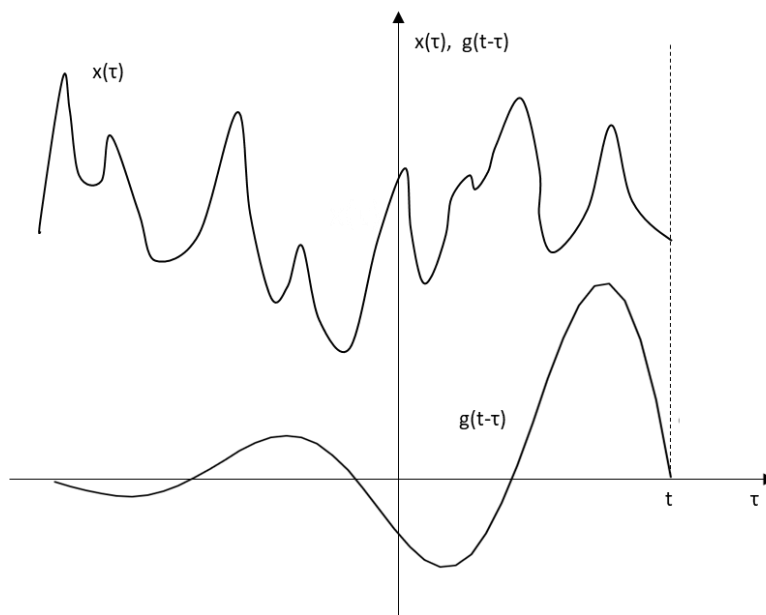


Abbildung 31: Berechnung des Ausgangssignals $y(t)$ durch Faltung von $x(t)$ mit der Gewichtsfunktion $g(t)$

Die Abbildung 31 zeigt, wie zur Berechnung des Ausgangssignals $y(t)$ die Gewichtsfunktion $g(t-\tau)$ über dieses Signal hinweggeschoben wird und so den Einfluss der zurückliegenden x -Werte auf $y(t)$ bildet. Je weiter die Werte in der Vergangenheit liegen, desto geringer ist ihr Einfluss auf das Ausgangssignal zum Zeitpunkt $t=0$. Aber auch die nur kurz zurückliegenden Werte gehen mit niedrigem Gewicht ein, was eine Folge des Tiefpassverhaltens der 2. Ordnung ist. Die Integration über alle Werte von x in der Vergangenheit, gewichtet mit der „Gewichtsfunktion“ ergibt den Wert des Ausgangssignals $y(t)$.

6.2 Multiplikation im Zeitbereich = Faltung im Frequenzbereich

Wir multiplizieren zwei Zeitfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ im Zeitbereich, wobei $y(t)$ hier **nicht** den Ausgang eines Systems, sondern eine sog. Fensterfunktion darstellt.

$$z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

Man kann man ganz analog einen Ausdruck für das Spektrum $Z(f)$ ableiten, der nun eine Faltung im Frequenzbereich bedeutet:

$$Z(f) = \int_{f_1=-\infty}^{+\infty} X(f_1) \cdot Y(f - f_1) \cdot df_1$$

40

Gl (40) findet häufig Anwendung bei der Berechnung des Einflusses von Fensterfunktionen $y(t)$ auf die Spektraldarstellung eines Signals $x(t)$. So bedeutet die Anwendung einer rechteckigen Fensterfunktion $y(t)$ der Breite T auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Spektrum $X(f)$, dass $X(f)$ mit der Transformierten des Rechteckimpulses (=Spaltsinus nach Gl (16)) gefaltet wird. Durch Zeitbegrenzung mit harten Fensterfunktionen können damit erhebliche Verzerrungen im Spektrum einhergehen.

7 Tabellarische Zusammenfassung – Analogien zwischen Zeit- und Frequenzbereich

Die Analogien zwischen Zeit- und Frequenzbereich sind weitgehend.

Operation	Zeitbereich		Frequenzbereich
Streckung / Stauchung Ordinate	$y(t) = K \cdot x(t)$	\leftrightarrow	$Y(f) = K \cdot X(f)$
Streckung / Stauchung Abszisse (t, f)	$y(t) = x(K \cdot t)$	\rightarrow	$Y(f) = \frac{1}{K} \cdot X\left(\frac{f}{K}\right)$
	$y(t) = \frac{1}{K} \cdot x\left(\frac{t}{K}\right)$	\leftarrow	$Y(f) = X(K \cdot f)$
Verschiebung entlang Abszisse	$y(t) = x(t - t_0)$	\rightarrow	$Y(f) = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0} \cdot X(f)$ frequenz-proportionale Phasenänderung Betrag bleibt erhalten,
	$y(t) = \text{RE}(e^{j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot x(t))$ Modulation von $x(t)$ mit f_0	\leftarrow	$Y(f) = X(f - f_0)$
Nullwert auf der Abszisse (t, f)	$x(0) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot df$	\leftrightarrow	$X(0) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$ Gleichanteil von $x(t)$
Energiebilanz (Parseval-Theorem)	$W = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt$		$W = \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 \cdot df$

Multiplikation / Faltung	$z(t) = x(t) \cdot y(t)$ <p>Multiplikation im Zeitbereich</p>	→	$Z(f) = \int_{f_1=-\infty}^{+\infty} X(f_1) \cdot Y(f - f_1) \cdot df_1$ <p>Faltung im Frequenzbereich</p>
	$z(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau$ <p>Faltung im Zeitbereich</p> <p>Sonderfall: $y(t)=g(t)$ – lineares System</p> $z(t) = \int_{\tau=-\infty}^t x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$	←	$Z(f) = X(f) \cdot Y(f)$ <p>Multiplikation im Frequenzbereich</p> <p>Sonderfall: $Y(f)=G(f)$ – lineares System</p>
Abtast-Theorem	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{si} \left(\pi \cdot \left(\frac{t}{\Delta t} - n \right) \right)$ <p>Abtastung eines bei $f_{\max} = f_a/2$ bandbegrenzten Signals $x(t)$</p>	→	$X_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k \cdot f_a) \quad ; \quad f_a = \frac{1}{\Delta t}$ $= \frac{1}{f_a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot e^{j2\pi f \cdot n \cdot \Delta t}$ <p>Periodisch wiederholtes Spektrum $X(f)$</p>
	$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - n \cdot T) \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{T}$ $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k \cdot f_0 \cdot t} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{T} \int x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}$ <p>Periodisch wiederholte Zeitfunktion $x(t)$</p>	←	$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k \cdot f_0) \cdot \text{si} \left(\pi \left(\frac{f}{f_0} - k \right) \right)$ <p>Abtastung des stetigen Spektrums $X(f)$ einer zeitbegrenzten Funktion $x(t)$ c_k = Koeffizienten der Fourier-Reihe</p> $c_k = \frac{X(k \cdot f_0)}{T}$

8 Diskrete Fourier-Transformation

Wann immer man Datenreihen mit dem Computer verarbeitet, hat man es mit endlich vielen diskreten Werten zu tun. Wir nehmen hier – wie bereits oben – an, dass die Datenreihen Zeitreihen sind. Generell könnte die unabhängige Variable aber auch eine räumliche Koordinate oder ein Winkel sein.

8.1 Diskretisierung und Begrenzung des Zeitsignals

Im Abschnitt 5 über Abtastung und Periodifizierung hatten wir bereits gezeigt, dass eine zeitliche Abtastung eines bandbegrenzten Signals ohne Informationsverlust möglich ist. (Abtasttheorem im Zeitbereich). Analog dazu ist bei zeitlicher Begrenzung (und Wiederholung) eine Angabe des Spektrums für beliebige Frequenzen anhand der diskreten Fourier-Koeffizienten möglich. (Abtasttheorem im Frequenzbereich)

Für die computergestützte Verarbeitung von Signalen ist natürlich sowohl eine Zeit- als auch eine Bandbegrenzung notwendig.

Genau wie oben bei den stetigen Zeitsignalen haben wir eine Beobachtungszeit bzw. Periode T , aus der sich die Grundfrequenz ω_0 bzw. f_0 ergibt, welche wir im Weiteren aber aus Analogiegründen mit $\Delta\omega$ bzw. Δf bezeichnen werden.

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f = \frac{2\pi}{T}$$

Wenn man nun die Abtastzeit Δt vorgibt, dann ergibt sich die Anzahl der Abtastwerte in der Beobachtungszeit T zu

$$N = \frac{T}{\Delta t} = T \cdot f_a$$

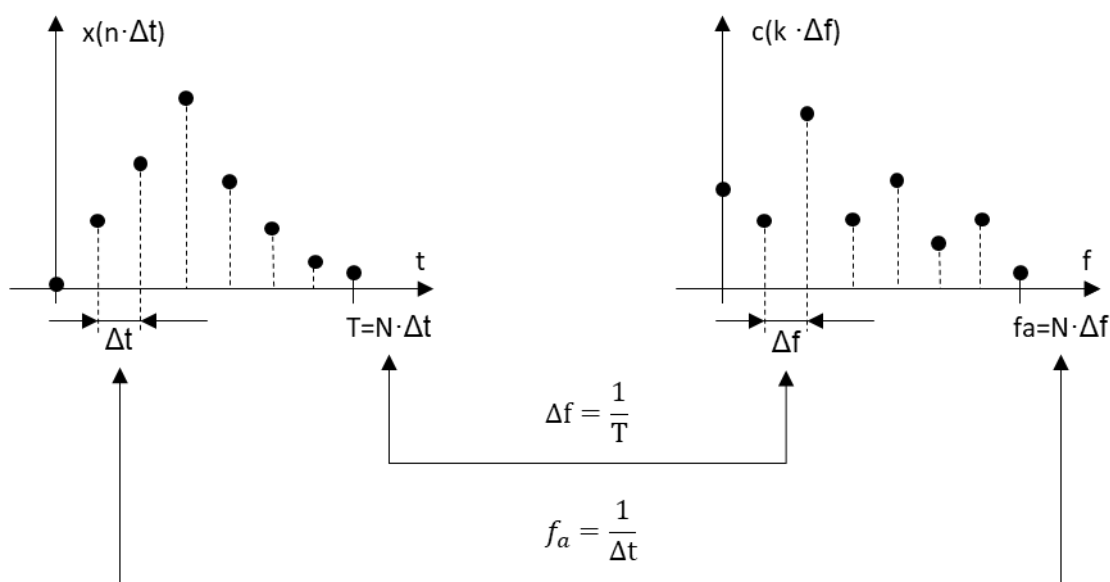


Abbildung 32: Zusammenhang der Parameter im Zeit- und Frequenzbereich bei der DFT

8.2 Abtast-Theorem nach Kotelnikov/Shannon

GI (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**) sagt aus, Die Gleichungen der Diskreten Fourier-Transformation (DFT)

Wir gehen von der Gleichung der Fourier-Koeffizienten für periodische Funktionen aus und ersetzen darin das Integral durch eine entsprechende Summe

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt \quad \text{mit} \quad dt = t_a \quad T = N \cdot t_a$$

$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k \cdot n}{N}}$	41
---	----

Zur Unterscheidung von den Fourier-Koeffizienten c_k stetiger Funktionen $x(t)$ bezeichnen wir die Fourier-Koeffizienten nun mit $c(k)$. Die Summe läuft von $n = 0$ bis $n = N-1$, teilt das Intervall T also in genau N Teile der Breite t_a . Der eigentliche Zeitbezug ist verloren gegangen. Da die $x(n)$ die Abtastwerte der periodischen Funktion $x(t)$ sind, gilt $x(n) = x(n+N)$. Nun sind aber auch die Fourier-Koeffizienten periodisch:

$$c(k + N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{(k+N) \cdot n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k \cdot n}{N}} \cdot e^{-j2\pi n} = c(k)$$

Außerdem gilt, dass die $c(N-k)$ die konjugiert komplexen Werte von $c(k)$ sind.

$$c(N - k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{(N-k) \cdot n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{+j2\pi \frac{k \cdot n}{N}} = \overline{c(k)}$$

Für die Rücktransformation bekommen wir

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \quad \text{mit} \quad t = n \cdot t_a \quad k_{\max/\min} = \pm \frac{f_a}{f_0} = \pm \frac{1}{2t_a} = \pm \frac{N}{2}$$

$$x(n) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} c(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot n}{N}}$$

Oder nach Anwendung der Periodizität der $c(k)$:

$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot n}{N}}$	42
--	----

Die Gleichungen (41) und (42) beschreiben die Diskrete Fourier Transformation (DFT). Der Zeitbezug ist in diesen Formeln verloren gegangen. Sie bilden die reelle Zahlenfolge $x(n)$ mit genau N Elementen auf die komplexe Zahlenfolge $c(k)$ mit ebenfalls genau N Elementen ab. Von den N Elementen $c(k)$ sind aber nur die Werte für $c(k \leq N/2)$ voneinander unabhängig. Die höheren Werte $c(k > N/2)$ ergeben sich als konjugiert komplexe Werte. (Sie sind die diskrete Entsprechung der negativen Frequenzen im stetigen Fall).

Bei der Lösung eines konkreten technischen Problems muss man sich bewusst sein, dass für eine gegebene Beobachtungszeit T und eine gegebene Anzahl von Tastwerten N die Indexwerte k und n für folgendes stehen:

$$k := k \cdot f_0 \quad n := n \cdot t_a \quad T = N \cdot t_a$$

8.3 Der Algorithmus der Fast Fourier Transformation (FFT)

Die Berechnung der DFT nach Gl (42) auf dem Computer muss für jeden der N Frequenzwerte ($0 \leq k \leq N-1$) jeweils N komplexe Rechenoperationen ausführen, also insgesamt $N \cdot N$ Operationen. Wenn N eine Zweierpotenz ist, dann lässt sich die Periodizität in der komplexen e-Funktion ausnutzen, was die Berechnung erheblich beschleunigt. Wir zeigen das an der Gl (41), wobei wir auf den Normierungsfaktor N verzichten:

$c(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k \cdot n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{k \cdot n}$	43
---	----

Dabei stellt der komplexe Zeiger W_N für ein gegebenes N eine Konstante dar, die genau denjenigen Punkt auf dem Einheitskreis markiert, dessen Argument der N-te Teil des Vollwinkels 2π ist.

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = (e^{-j2\pi})^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{(e^{-j2\pi})}$	44
--	----

Gl() zeigt auch, weshalb W_N auch die N-te Einheitswurzel genannt wird.

Die Potenzen dieser Konstante für $0 \leq k \leq N$, die in Gl (43) auftreten, liegen symmetrisch auf dem Einheitskreis, teilen diesen in genau N gleiche Teile.

$$(W_N)^k = W_N^k = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^k = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k}$$

In Gl (46) kommen nun auch sehr viel höhere Potenzen von W_N vor als solche mit N. Dabei wiederholen sich die Werte, der Einheitskreis wird mehrfach durchlaufen.

$$W_N^{k+l \cdot N} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot (k+l \cdot N)} = e^{-j2\pi l} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k} = W_N^k$$

Für die FFT, bei der N eine 2-er Potenz ist, ist noch der folgende Zusammenhang wichtig:

$W_N^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k} \right)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot k} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2} \cdot k} = W_{N/2} \quad \text{oder} \quad W_{2N}^2 = W_N$	45
--	----

Das bedeutet, dass eine FFT mit halber Länge N/2 auf dem Einheitskreis mit der doppelten Schrittweite des Arguments operiert. Wir demonstrieren die Zusammenhänge für N = 8 und N=4 in der Abbildung 33. Dabei gilt:

$$W_8 = e^{-j\frac{2\pi}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad W_8^2 = \left(e^{-j\frac{\pi}{4}} \right)^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = W_4$$

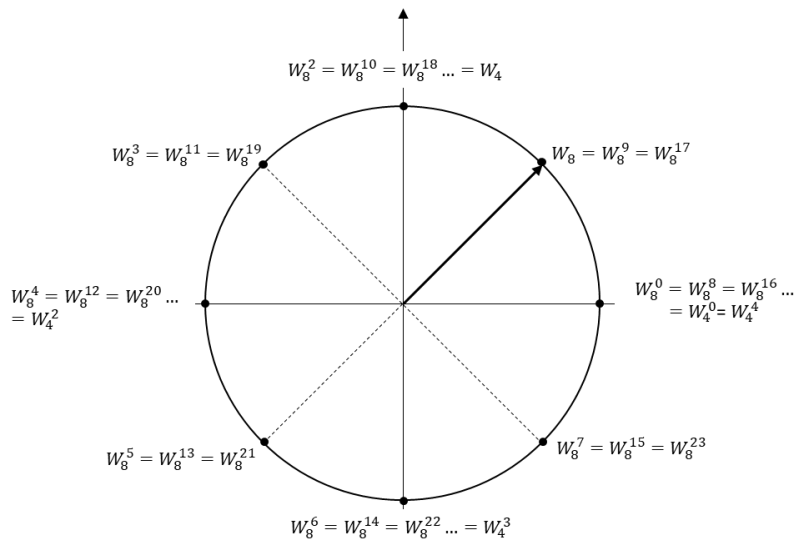


Abbildung 33: Wurzeln W_8 und W_4 auf dem Einheitskreis

Wir stellen also fest, dass die Potenzwerte von W_4 in den Potenzwerten von W_8 enthalten sind. Wir zerlegen daher die FFT nach Gl (43), deren N eine Zweierpotenz (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256...) ist, in zwei Summen: eine über die geraden Indexwerte von $x(n)$ und eine über die ungeraden Indexwerte von $x(n)$. Um nicht ständig $N/2$ schreiben zu müssen, schreiben wir für N nun $2 \cdot N$, was ja immer möglich ist, da N eine Zweierpotenz ist.

$$c_k(2N, x) = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) \cdot W_{2N}^{k \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n) \cdot W_{2N}^{k \cdot 2 \cdot n} + \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1) \cdot W_{2N}^{k \cdot (2 \cdot n+1)}$$

Wir führen die beiden neuen Abtastfolgen der halben Länge N ein ($g(n)$ für „gerade“ Indexwerte und $u(n)$ für „ungerade“ Indexwerte)

$$g(n) = x(2n) \quad u(n) = x(2n+1) \quad 0 \leq n < N$$

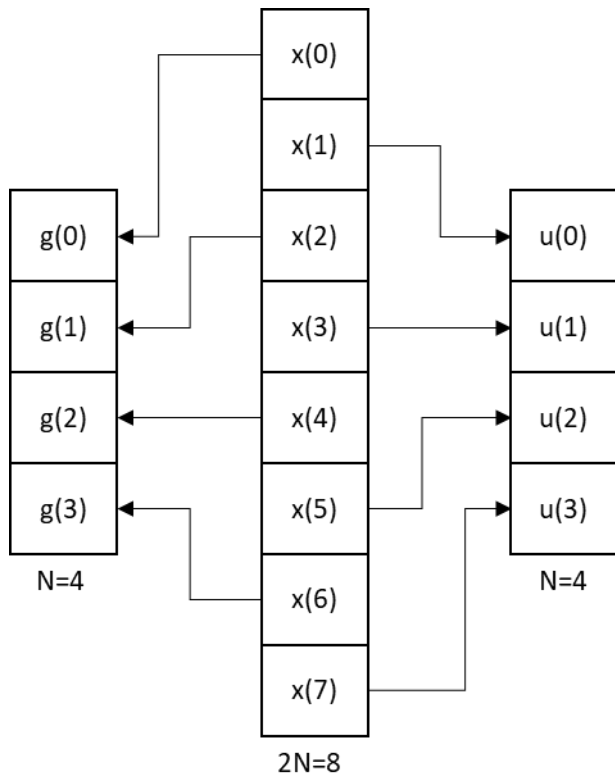


Abbildung 34: Aufteilung einer 2N- Abtastfolge in zwei N-Folgen

Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned}
 c_k(2N, x) &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \cdot W_{2N}^{k \cdot 2 \cdot n} + \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot W_{2N}^{k \cdot (2n+1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \cdot (W_{2N}^2)^{k \cdot n} + W_{2N}^k \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot (W_{2N}^2)^{k \cdot n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \cdot W_N^{k \cdot n} + W_{2N}^k \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot W_N^{k \cdot n}
 \end{aligned}$$

Die Summen in der letzten Gleichung entsprechen genau der Gl (43) für halbiertes $2N=N$ und damit für verdoppelte Schrittweite auf dem Einheitskreis:

$c_k(2N, x) = c_k(N, g) + W_{2N}^k \cdot c_k(N, u) \quad 0 \leq k < N$	46
--	----

Man muss noch beachten, dass auf der linken Seite der Gl (46) genau 2N Koeffizienten berechnet werden sollen, wobei die beiden Summanden auf der rechten Seite jeweils nur N Koeffizienten berechnen, da bei ihnen k nur im Bereich $0 \leq k < N$ läuft.

Man überlegt sich leicht, dass für $k > N$ gilt:

$c_k(2N, x) = c_{k-N}(N, g) + W_{2N}^{(k-N)} \cdot c_{k-N}(N, u) \quad N \leq k < 2N$	47
---	----

Da N nun eine Zweierpotenz ist, kann man diese Überlegung solange wiederholen, bis man zu N=1 gekommen ist.

Es zeigt sich, dass man damit die Anzahl der Operationen stark verringern kann:

$$O(DFT, N) = N^2 \quad O(FFT, N) = N \cdot \lg(N)$$

9 FFT mit EXCEL

9.1 AddIn „Analyse“ installieren

Wenn noch nicht installiert, dann muss das AddIn „Analyse-Funktionen“ und bei Bedarf auch das AddIn „Analyse-Funktionen - VBA“ installiert werden. Das geschieht unter dem Menü „Datei\Optionen\Add-Ins\Excel-Add-Ins“. Die Datenanalyse kann nach Installation über den Menüpunkt „Daten\Datenanalyse“ aufgerufen werden und bietet ca. 20 sehr hilfreiche Analyse-Tools an, von denen die „Fourieranalyse“ nur eine ist.

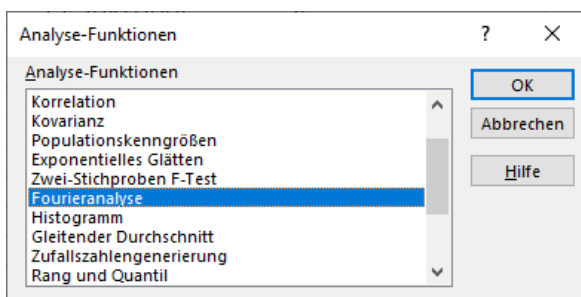


Abbildung 35: Auswahlmaske der Analyse-Tools

9.2 Komplexe Zahlen in EXCEL

In Excel werden komplexe Zahlen als Strings nach dem folgenden Muster abgelegt:

$$\langle \text{Realteil} \rangle \pm \langle \text{Imaginärteil} \rangle i$$

<Realteil> und <Imaginärteil> sind reelle, vorzeichenbehaftete Zahlen in allen dafür erlaubten Formaten. Es werden die wichtigsten Funktionen für komplexe Zahlen angeboten, die alle mit „IM“ beginnen. Dabei unterscheiden sich die Namen für die Zellen-Funktionen von den VBA-Funktionen, die alle über das Objekt *Application.WorkSheetFunction* aufgerufen werden können. Häufig benutzte sind:

Zellen-Funktion	VBA-Funktion (Application. WorkShetFunction)	Bedeutung (r=reelle Zahl, z=komplexe Zahl)
IMREALTEIL(z)	ImReal(z)	r = RE(z)
IMAGINÄRTEIL(z)	Imaginary(z)	r = Im(z)
IMABS(z)	ImAbs(z)	r = z
IMARGUMENT(z)	ImArgument(z)	r = arg(z)
IMKONJUGIERTE(z)	ImConjugate(z)	z = z-konjugiert
IMSUMME(z1, z2)	ImSum(z1, z2)	z = z1+z2
IMSUB(z1, z2)	ImSub(z1, z2)	z = z1-z2
IMPRODUKT(z1, z2)	ImProduct(z1, z2)	z = z1·z2
IMDIV(z1, z2)	ImDiv(z1, z2)	z = z1/z2

KOMPLEXE(real, imag)	Complex(real, imag)	$z = \text{real} + \text{imag} \cdot i$
----------------------	---------------------	---

Hinzu kommen die komplexen Funktionen für Wurzel, Logarithmus, Potenz, Winkelfunktionen usw.

Der FFT-Algorithmus liefert im Ausgangsbereich ($N = 2^i$ Zellen mit $2 \leq i \leq 12$) genau N komplexe Koeffizienten mit 14 Nachkommastellen. Die hohe Genauigkeit ist oft nicht gewünscht, eine Rundung der Zahlen innerhalb der Strings ist aber nicht einfach möglich. Man kann sich aber mit den o.g. Funktionen behelfen, indem man den String aufsplittet, Real- und Imaginärteil für sich rundet, dann wieder zusammensetzt und dann in eine weitere Spalte einträgt:

`<D4>=KOMPLEXE(RUNDEN(IMREALTEIL(C4);3);RUNDEN(IMAGINÄRTEIL(C4);3))`

9.3 Aufruf der „Fourieranalyse“ und Auswertung der Ergebnisse

9.3.1 Aufruf in einem Arbeitsblatt

Wir zeigen an einem einfachen Beispiel einer Sägezahnswingung für $N=8$ wie die Fourieranalyse aufgerufen wird. Dazu legen wir folgendes Excel-Sheet an:

	A	B	C	D	E
1	n, k	x(n)	c(k) = FFT(x(n))	x(n) = iFFT(c(k))	Re(x(n))
2	0	0 56		0	0
3	1	2 -7,99999999999999+19,3137084989848i		1,99999999999999	2
4	2	4 -7,99999999999999+8i		3,99999999999999	4
5	3	6 -7,99999999999999+3,31370849898476i		5,99999999999999	6
6	4	8 -8		8	8
7	5	10 -8-3,31370849898476i		10	10
8	6	12 -8,00000000000001-8i		12	12
9	7	14 -8,00000000000002-19,3137084989848i		14	14

Abbildung 36: Beispiel für eine Fourieranalyse auf einem Arbeitsblatt

Sinnvoller Weise arbeitet man spaltenweise. Wir tragen zur Übersicht in der Spalte A die Indexwerte 0..7 ein, die sowohl für n (Zeit-Index) als auch für k (Frequenz-Index) gelten. In Spalte B erfassen wir die Werte für x(n), hier als Beispiel $x(n)=2 \cdot n$. Spalten C bis E sind am Anfang noch leer.

Dann rufen wir über Daten/Datenanalyse/Fourieranalyse die Eingabemaske auf:

Abbildung 37: Eingabemaske für FFT

In diese Maske geben wir die o.g. Bereiche ein. Nach Bestätigung ist die Spalte C mit den 8 komplexen Fourier-Koeffizienten gefüllt. Man erkennt folgendes:

- Es findet keine automatische Division durch N (=8) statt. Das erkennt man am Wert von c(0), der mit 56 einfach nur die Summe aller x(n) ist. Teilt man durch 8, so entsteht der richtige Mittelwert $7 = (2+4+6+8+10+12+14)/8$ der eingetragenen Sägezahnswingung.
- Da der Sägezahn keine gerade Funktion ist, haben die c(k) sowohl Real- als auch Imaginärteil.
- Für $k > N/2=4$ wiederholen sich die c(k) in umgekehrter Reihenfolge (gespiegelt an $N/2$) als konjugiert komplexe Werte.

Jetzt führen wir die Rücktransformation vom Frequenz- in den Zeitbereich durch und erwarten, die Ursprungswerte aus Spalte B wiederzubekommen. Die Inputdaten sind jetzt die $c(k)$ in Spalte C und die Outputdaten werden in Spalte D abgelegt. Zusätzlich wird das Flag „Inverse Transformation“ angeschaltet.

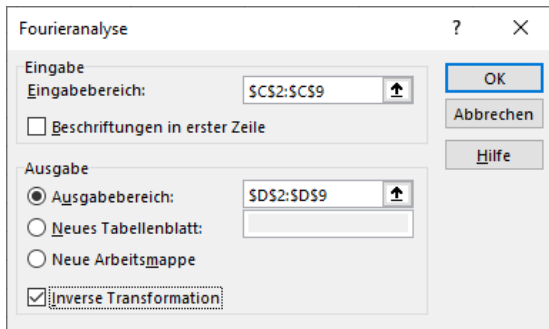


Abbildung 38: Eingabemaske für inverse FFT

Die Ursprungs-Zeitdaten in Spalte B werden in Spalte D auf 14 Stellen genau reproduziert. Allerdings sind sie als komplexe Zahlen abgelegt (Strings). Da sie sich so schlecht verarbeiten lassen, kann man mit der Zellfunktion `IMREALTEIL()` in einer weiteren Spalte daraus eine Zahl erzeugen.

Die inverse FFT führt demnach die Division durch N durch, anderenfalls wären alle $x(n)$ -Werte in Spalte D N mal so hoch.

9.3.2 Aufruf im VBA-Code

Wer gehofft hatte, dass der VBA-Aufruf der Fourieranalyse mit Arrays von komplexen Zahlen (also mit Arrays von Strings) arbeitet, der sieht sich getäuscht. Die VBA-Variante arbeitet ausschließlich mit Ranges, über die die Input-Daten und auch die Output-Daten übergeben werden müssen, und die stehts ein Arbeitsblatt benötigen, auf das sie sich beziehen. Diese unlösbare Verbindung von Oberfläche (hier: Arbeitsblatt) und Algorithmus (hier: FFT) ist kein gutes Programmdesign. Andere Sprachen (z.B. R) machen es besser. Die FFT arbeitet dort mit Vektoren, die man dann in beliebiger Form weiterverarbeiten oder ausgeben kann.

Wir zeigen trotzdem den Aufruf der FFT in zwei Makros, die Daten vom Sheet nach Abbildung 36 holen, sie transformieren und zurückstellen.

```
Sub fft()
    Dim fft As String
    'FFT = "C:\Program Files (x86)\Microsoft
Office\root\Officel6\Library\Analysis\ATPVBAEN.XLA\Fourier"
    fft = "ATPVBAEN.XLAM\Fourier"
    ' Hintransformation t--> f
    Application.Run fft, ActiveSheet.Range("$B$2:$B$9"),
        ActiveSheet.Range("$C$2:$C$9"), False, False
End Sub

Sub ifft()
    Dim fft As String
    fft = "ATPVBAEN.XLAM\Fourier"
    ' Rücktransformation f --> t
    Application.Run fft, ActiveSheet.Range("$C$2:$C$9"),
        ActiveSheet.Range("$D$2:$D$9"), True, False
End Sub
```

Der Vorteil dieser Makros besteht darin, dass man sie über einen Button aufrufen kann und dass das Ergebnis ohne störende Maske sofort im Sheet erscheint.

10 Beispiele zu FFT

10.1 Endliche Fourier-Reihe als Interpolationsfunktion

Die DFT bildet N Werte im Zeitbereich und N Werte im Frequenzbereich wechselseitig aufeinander ab. Dabei definieren die N Spektralwerte eine stetige Zeitfunktion, die genau durch die N Stützpunkte im Zeitbereich verläuft. Die diskreten Spektralwerte bilden die Koeffizienten im sog. trigonometrischen Interpolationspolynom.

Als Beispiel tasten wir eine Rechteck-Schwingung mit $N=16$ Werten pro Periode $T = 16$ s ab. Die Abtastzeit Δt beträgt 1 s - Abbildung 41. Dabei ist zu beachten, dass die Abtastwerte zu den Zeiten 0s, 1s, ..., 14 s und 15 s genommen werden. Der Abtastwert bei $t=16s$ gehört nicht mehr zu den 16 Abtastwerten, er wird auf Grund der Periodizität zu $x(16s) = x(0s)$ berechnet. Das bedeutet, dass die abgetastete Zeitfunktion *nicht* gerade ist. (Das geht bei einer geraden Anzahl N von Tastwerten prinzipiell nicht. Man erkennt es auch in der Umgebung der Linie $t=0$: ES liegen 3 rote Abtastpunkte mit dem Wert 1 bei $t > 0$, aber vier graue bei $t < 0$.)

Wir geben die Zeiten $t(n)$ und die Werte $x(n)$ in die Spalten A und B ein und berechnen die die FFT davon in der Spalte C:

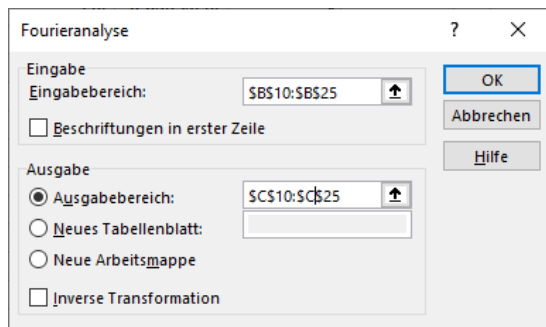


Abbildung 39: Festlegen der Input- und Output-Bereiche der FFT

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7			$ck = FFT(xn)$					$xn = iFFT(ck)$	
8	t_n	x_n	ck	$Re(ck)/N$	$Im(ck)/N$	$ ck /N$		inv. FFT	$Re(iFFT)$
9	0	1	8	0,5000	0,0000	0,5		1	1
10	1	1	5,02733949212585+0,999999999999997i	0,3142	0,0625	0,320364		1	1
11	2	1	0	0,0000	0,0000	0		1	1
12	3	1	-1,49660576266549-0,999999999999996i	-0,0935	-0,0625	0,112497		1	1
13	4	0	0	0,0000	0,0000	0		0	0
14	5	0	0,6681786379193+0,999999999999999i	0,0418	0,0625	0,075168		0	0
15	6	0	0	0,0000	0,0000	0		0	0
16	7	0	-0,198912367379659-0,999999999999996i	-0,0124	-0,0625	0,063724		0	0
17	8	0	0	0,0000	0,0000	0		0	0
18	9	0	-0,198912367379658+1i	-0,0124	0,0625	0,063724		0	0
19	10	0	0	0,0000	0,0000	0		0	0
20	11	0	0,668178637919297-0,999999999999999i	0,0418	-0,0625	0,075168		0	0
21	12	1	0	0,0000	0,0000	0		1	1
22	13	1	-1,49660576266549+1i	-0,0935	0,0625	0,112497		1	1
23	14	1	0	0,0000	0,0000	0		1	1
24	15	1	5,02733949212585-1,000000000000001i	0,3142	-0,0625	0,320364		1	1

Abbildung 40: Excel-Sheet zur FFT einer Rechteck-Schwingung mit $N=16$

Man erkennt, dass die Spektralwerte in Spalte C nicht mit N normiert sind und dass – wie oben bereits erklärt – auch imaginäre Anteile auftreten. Der Imaginärteil von c_0 ist allerdings immer Null. Berechnet man den Absolutbetrag der c_k in Spalte F und normiert außerdem mit N , dann ergeben sich dieselben Koeffizienten, die wir bereits für den Rechteckimpuls berechnet hatten. Auch das

Verschwinden der c_k für gerade k hatten wir dort bereits berechnet. Außerdem erkennt man die c_k -Werte von $k = 1$ bis $k = N/2$ unabhängig voneinander sind. Für die oberen Werte gilt:

$$c\left(k > \frac{N}{2}\right) = \text{Konjugiert}(c(N - k))$$

Nimmt man das nichtnormierte komplexen Werte c_k und unterzieht sie einer inversen FFT, so ergibt sich Spalte H. Diese wird auch als komplexer String ausgegeben, obwohl der Imaginärteil steht = 0 ist. Es ergeben sich automatisch die richtigen Ursprungswerte – also wird eine Normierung mit N vorgenommen. Realteilbildung ergibt wie gewünscht wieder genau die Ausgangs-Tastwerte.

In der Abbildung 41 haben wir das trigonometrische Interpolationspolynom dargestellt, das genau durch die 16 Stützwerte verläuft. Außerhalb der Periode werden die Abtastwerte periodisch wiederholt.

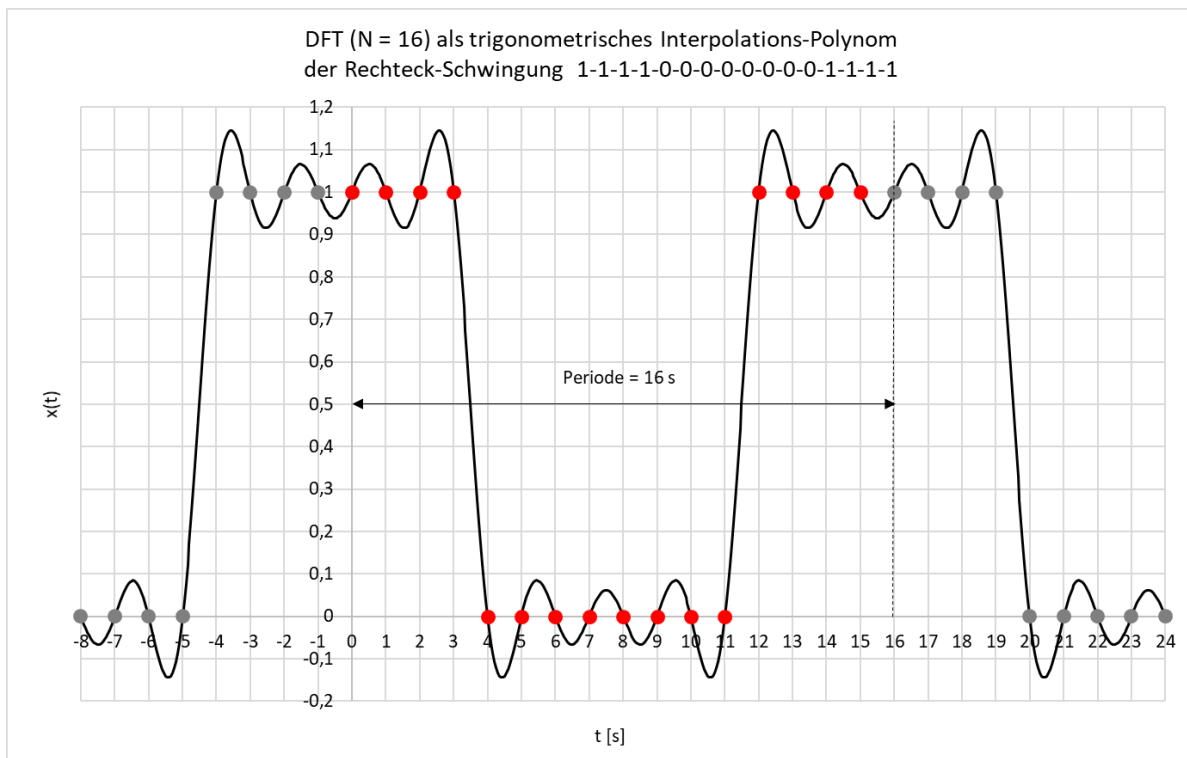


Abbildung 41: DFT als trigonometrisches Interpolationspolynom

Zur Erzeugung der Abbildung 41 haben wir die folgende VBA-Funktion benutzt, der die Real- und Imaginärteile des FFT-Ergebnisses als Range-Variablen übergeben werden:

```
Function fft_16(t As Double, f0 As Double, RE As Range, IM As Range) As Double
    Dim co As Double, si As Double
    Dim real As Variant, imag As Variant
    Dim k As Integer
    Dim ak As Double, bk As Double

    ' ak mit cos(2*Pi*k*f0*t) berechnen
    k = 0
    For Each real In RE
        If k = 0 Then
            ak = real.Value2
        Else
            ak = 2 * real.Value2
        End If
        co = co + ak * Cos(2 * Pi * k * f0 * t)
        k = k + 1
    
```

```

Next real

' bk mit sin(2*Pi*k*f0*t) berechnen
k = 0
For Each imag In IM
    bk = -2 * imag.Value2
    si = si + bk * Sin(2 * Pi * k * f0 * t)
    k = k + 1
Next imag

fft_16 = co + si
End Function

```

10.2 Sinussignal in starkem Rauschen erkennen

Man kann die FFT in EXCEL zur Detektion von verrauschten Signalen verwenden. Als Beispiel generieren wir ein Signal mit folgenden zwei additiv überlagerten Komponenten:

- Nutzsinal:
 $x(t) = 0,2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 87 \text{ Hz} \cdot t)$
- Störsignal (Rauschen)
Zufallszahlen normalverteilt mit $N(0, 1)$

Das Störsignal hat zu 68% eine Amplitude > 1 , was 5 Mal so groß wie die Amplitude des Nutzsignals ist. Mit bloßem Auge ist das Nutzsinal im Rauschen nicht zu erkennen.

Parameter:

- Abtastwerte N: 4096
- Gesamtzeit: T: 4 s
- Abtastzeit: dt: 9,76 ms
- Min. Frequenz: f0: 0,25 Hz
- Max. Frequenz: fmax: 512 Hz (512 / 0,25=2048 diskrete f-Werte)

Abbildung 42 zeigt den Betrag der ermittelten komplexen Fourier-Koeffizienten bis zur Frequenz von 200 Hz. Man erkennt ganz deutlich das Nutzsinal bei 87 Hz, dessen Amplitude ca. 3 mal so groß ist wie die maximale Störampplitude.

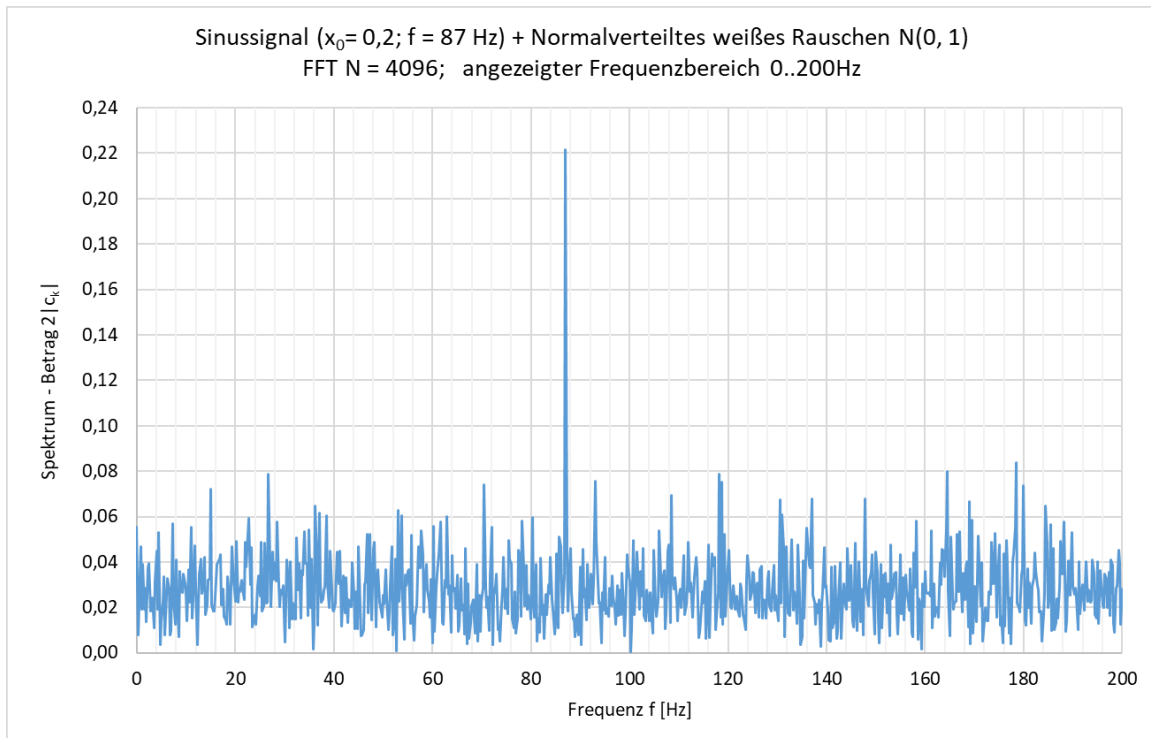


Abbildung 42: Ergebnis der FFT eines stark verrauschten Sinus-Signals von 87 Hz

Wenn man alle Spektrallinien - außer der herausragenden von 87 Hz - unterdrückt und dann eine FFT-Rücktransformation macht, kann man das ursprüngliche Sinus-Signal relativ gut wiederherstellen.

Technisch gesehen ist das eine Bandpass-Filterung, die aber in EXCEL einfach mit einer WENN-Zelloperation zu bewerkstelligen ist. Hätte man z.B. in Spalte D die ermittelten komplexen Spektrallinien und möchte in E das bereinigte Spektrum haben, so trägt man in die Spalte E die folgende Formel ein:

$$=WENN(IMABS(D217) > 0,1;D217;0)$$

Diese Formel behält nur die Spektrallinien, deren Betrag größer als 0,1 ist. Die anderen werden auf Null gesetzt.

BEACHTE:

Die Formel muss auf das gesamte Spektrum angewendet werden, muss also auch den konjugiert-komplexen Wert bei der Frequenz $1024 \text{ Hz} - 87 \text{ Hz} = +937 \text{ Hz}$ behalten und für die Rücktransformation bereitstellen.

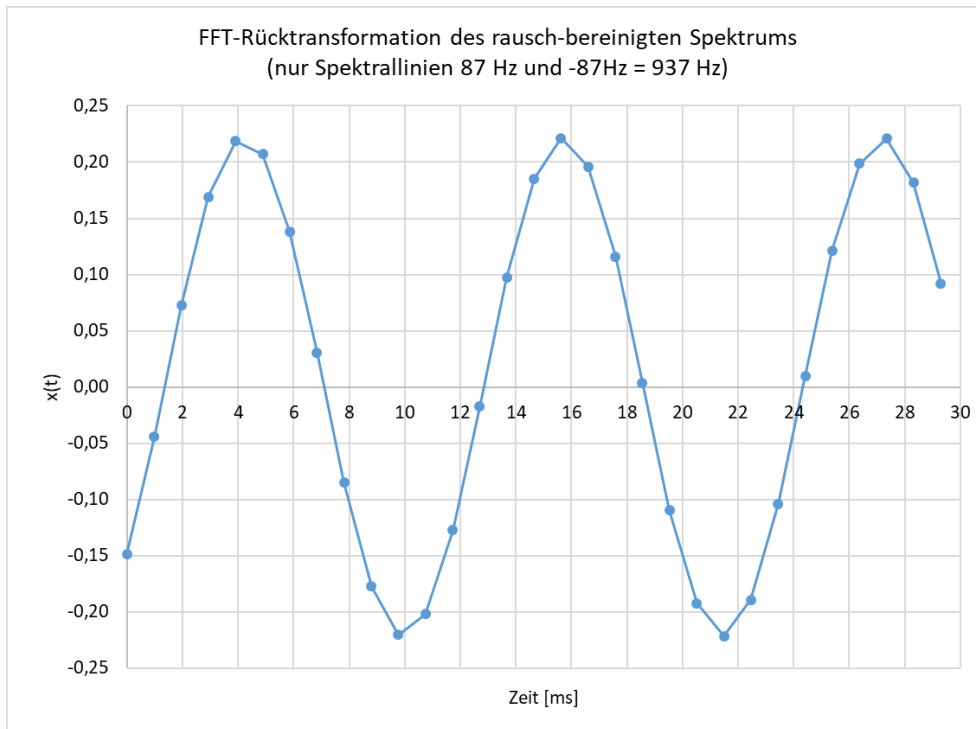


Abbildung 43: Ergebnis der FFT-Rücktransformation nach Bereinigung des Spektrums

EXCEL begrenzt die Analyse leider auf $N \leq 4096$ Abtastwerte. Wenn am größere Datenmengen verarbeiten möchte, dann kann man z.B. die Sprache R benutzen. Das folgende R-Skript erzeugt dasselbe Signal wie oben, nutzt aber eine halbe Million Abtastwerte ($N=2^{19}$). R bietet einen sehr schnellen FFT-Algorithmus an, der genauso funktioniert wie in EXCEL.

Auch hier gilt im Ergebnis für $0 \leq k \leq N/2$:

$$c_{N-k} = \bar{c}_k$$

Die Normierung (Division durch N) muss man selbst vornehmen. Die Rechenzeit für das Beispiel beträgt ca. 10 s. (Standard-PC)

Durch die große Zahl von Abtastwerten steigt das Signal-Rauch-Verhältnis am Ausgang.

```
# Test FFT
pi <- 3.14159
N <- 4096*128      # Zahl der Stützwerte
fa <- 1000        # Abtastfrequenz
dt <- 1 / fa      # Abtastzeit
T <- N * dt       # Gesamtzeit
df <- 1 / T       # Grundfrequenz f0

fsin <- -87       # Frequenz Nutzsinal
ampsin <- 0.2     # amplitude Nutzsinal
phisin <- -45     # Phase Nutzsinal

xrand <- rnorm(N, 0, 1)      # Störsignal
xsyst <- 1:N
f <- 1:N
for(k in 1:N) {
  xsyst[k] = 0.2*sin(2*pi*87*k*dt-phisin*pi/180) # Nutzsinal
  f[k]=k*df                                     # Frequenzen
}

x <- xsyst + xrand          # gestörtes Signal
```

```
ck <-fft(x, inverse=FALSE)      # Fourier-Koeffizienten

amp <- 2/N*sqrt(Re(ck)^2+Im(ck)^2) # Amplitude

plot(f,amp, ylim=c(0,0.25), type="h",
     main="FFT eines verrauschtes Sinussignals (N=2^19 = 524.288)",
     xlab="Frequenz [Hz]", ylab="2*|Ck|")
```

FFT eines verrauschtes Sinussignals (N=2¹⁹ = 524.288)

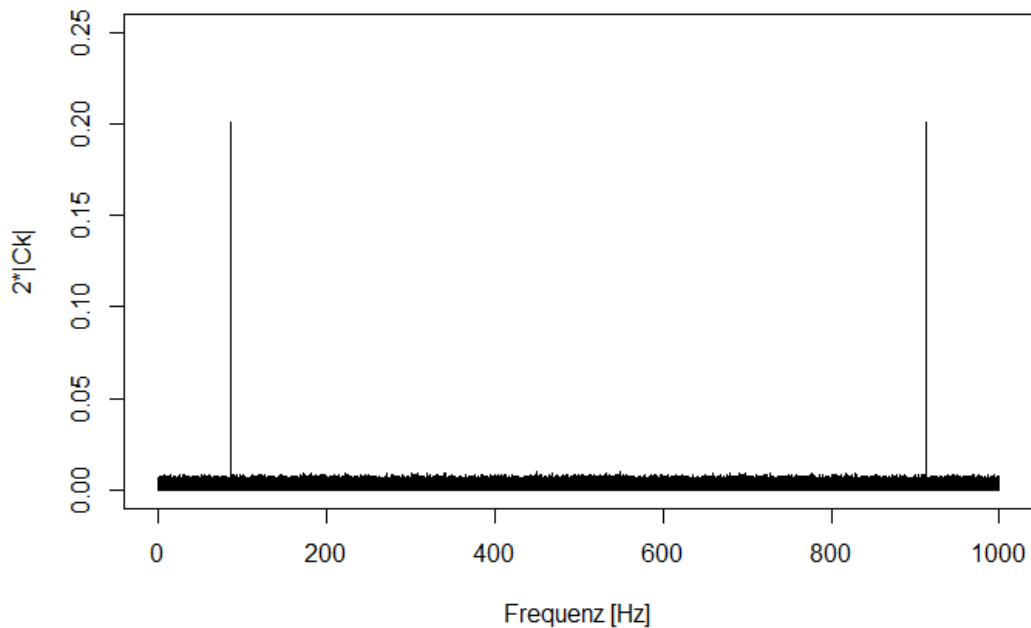


Abbildung 44: FFT über R-Skript (gesamter Frequenzbereich)

10.3 Verschiebung des Spektrums = Modulation der Zeitfunktion

Das folgende R-Skript berechnet per FFT (N=2¹⁴ = 16.384) das komplexe Spektrum eines Dreiecksimpulses, der nach der folgenden Formel aufgebaut wird:

$$x(n) = \begin{cases} n & \text{für } 0 \leq n \leq N/16 \\ \frac{N}{8} - n & \text{für } N/16 < n \leq N/8 \\ 0 & n > N/8 \end{cases}$$

Dieses Spektrum wird wiederholt, um dann einen Ausschnitt von $n = 163 - 16.384 + 163 - 1$ in den Zeitbereich zurück zu transformieren.

```
# Inverse FFT nach Spektralverschiebung
pi <- 3.14159
N <- 2^14    # = 16384
T <- 1

# Frequenzverschiebung
dN <- N/100
dt <- T/N

# xt als Dreiecksimpuls mit Nullen
xt <- c(seq(0, N/16-1, 1), seq(N/16,0,-1))
xt <- c(xt, rep(0,7*N/8-1))
```

```

# Spektrum des Dreieck-Impulses
xf <- fft(xt, inverse=FALSE)/N

# Spektrum wiederholen
xfrep <- c(xf, xf)          # Wiederholtes Spektrum

# verschobenes Spektrum
from <- dN
to <- dN + N -1
xfmove = xfrep[from:to]

#Rücktransformation des verschobenen Spektrums
xtmove <- fft(xfmove, inverse=TRUE)

# Realteil der Rücktransformierten
xtreal <- Re(xtmove)

# Zeitachse in ms
t <- seq(from=0, by=dt, length.out=N)*1000

plot(t,xtreal, type ="l",
      main="Rücktransformation des verschobenen Spektrums \n
           eines symmetrischen Dreiecks-Impulses",
      ylim=c(-1000,+1000), xlim=c(0,130),
      xlab="t [ms]", ylab="x(t)")
abline(h=0)
abline(v=0)
abline(v=125)

```

Folgende Parameter wurden benutzt, sie lassen sich an der folgenden Abbildung gut überprüfen.

Anzahl der Tastwerte N	16.384 = 2^{14}
Dauer der gesamten Abtastung T	1 s
Frequenzauflösung $\Delta f = 1/T$	1 Hz
Zeitauflösung $\Delta t = T/N$	0,061 ms
Maximale Impulshöhe N/16	1.024
Impulsdauer $T_I = 2 \cdot \Delta t \cdot N/16 =$	125 ms
Modulationsfrequenz = Frequenzverschiebung f_M	163 Hz
Schwingungsdauer der Modulationsschwingung T_M	6,13 ms

Man erkennt, wie der Dreieckimpuls durch die Verschiebungsfrequenz f_M moduliert wird.

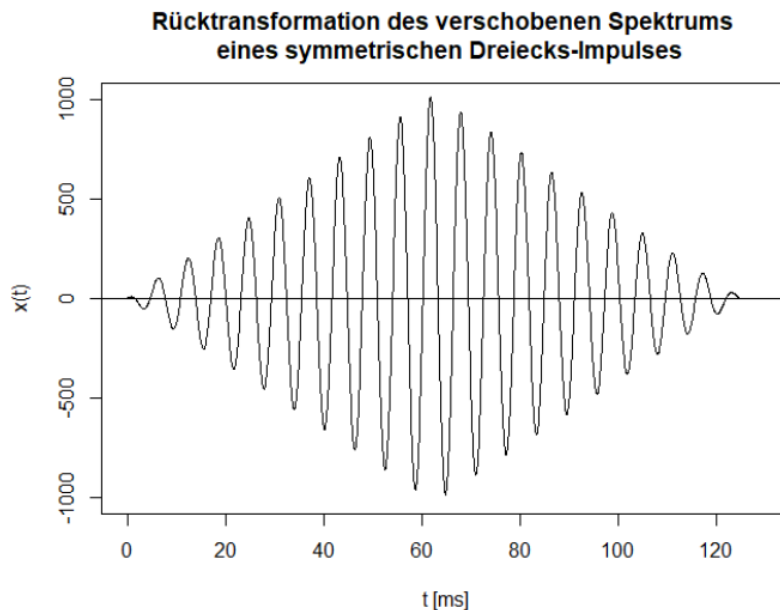


Abbildung 45: Rücktransformation eines verschobenen Spektrums bedeutet Modulation der Zeitfunktion $x(t)$

10.4 Inverse FFT zur Berechnung der Stoßantwort eines Tiefpasses

Wir wollen das Antwortsignal des Tiefpasses nach Abbildung 20 bzw. Gl (26) auf einen sehr kurzen, aber starken (Spannungs-)Stoß berechnen, also die sog. Stoßantwort $g(t)$.

Es gibt mehrere Möglichkeiten dazu. Man kann die DLG (23) mit bestimmten Anfangsbedingungen lösen. Oder man berechnet mit den Mitteln der komplexen Wechselstromrechnung wie oben angegeben die komplexe Übertragungsfunktion $G(\omega)$ und dann aus dieser durch Rücktransformation die Stoßantwort.

10.4.1 Analytische Lösung über die komplexe Übertragungsfunktion $G(\omega)$

Da der Stoß ein konstantes Spektrum hat, ist das Spektrum des Ausgangssignals gleich der komplexen Übertragungsfunktion des Systems; und das Zeitsignal $y(t)$ ist dann die Fourier-Rücktransformierte des komplexen Übertragungsfaktors.

$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot e^{+j\omega \cdot t} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+j\omega \cdot t}}{(1 - LC \cdot \omega^2) + j\omega \cdot CR} \cdot d\omega$	48
---	----

Dieses Integral ist lösbar, wobei die folgenden Konstanten auftreten:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{Resonanzfrequenz (ungedämpft)}$$

$$\tau = \frac{2L}{R} \quad \text{Zeitkonstante der Dämpfung}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} \quad \text{Frequenz des gedämpften Systems} < \omega_r$$

Die Resonanzfrequenz des ungedämpften Systems hängt nur von den Werten der Energiespeicher L und C ab. Sie ist umso kleiner, je mehr Energie diese speichern können. Die Zeitkonstante der

Dämpfung hängt vom Verhältnis des Energiespeichers L zum „Reibungs“-Element R ab. Je größer diese Verhältnis ist, desto größer ist die Zeitkonstante und desto länger wird es dauern, bis eine Schwingung des Systems zum Erliegen kommt.

Die Lösung kennt drei unterschiedliche Fälle:

- Schwingungsfall $\omega_r > 1/\tau$
Bei geringer Dämpfung kommt es zu abklingenden Schwingungen.
- Aperiodischer Grenzfall $\omega_r = 1/\tau$
Es gibt keine Schwingungen mehr.
- Kriechfall $\omega_r < 1/\tau$
Die Dämpfung ist so groß, dass das Ausgangssignal in seine Endlage „kriecht“.

Wir wollen uns hier nur mit dem Schwingungsfall befassen, für den die Lösung lautet:

$g(t) = \frac{\omega_r^2}{\omega_d} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)$	49
---	----

Das System reagiert auf einen Stoß mit einer Sinus-Schwingung, die aber wegen der Dämpfung eine geringere Frequenz als die ungedämpfte Eigenfrequenz hat. Die Amplitude der Schwingung nimmt nach einer e-Funktion ab, in der die Zeitkonstante τ vorkommt.

Wir wählen einen solchen Wertesatz der Bauelemente R, L und C, bei dem die Eigenfrequenz genau 10.000 Hz = 10kHz beträgt.

Name	Wert
R	150 Ω
L	5 mH
C	0,5066 nF
ω_r und f_r	62.832,22 s^{-1} 10.000 Hz
τ	6,66 E-5 s
ω_d	61.015,47 s^{-1}

Die folgende Abbildung zeigt die Stoßantwort für diesen Wertesatz. Man erkennt, dass die Dauer der gedämpften Schwingung geringfügig größer als 0,1ms = 100 μs ist.

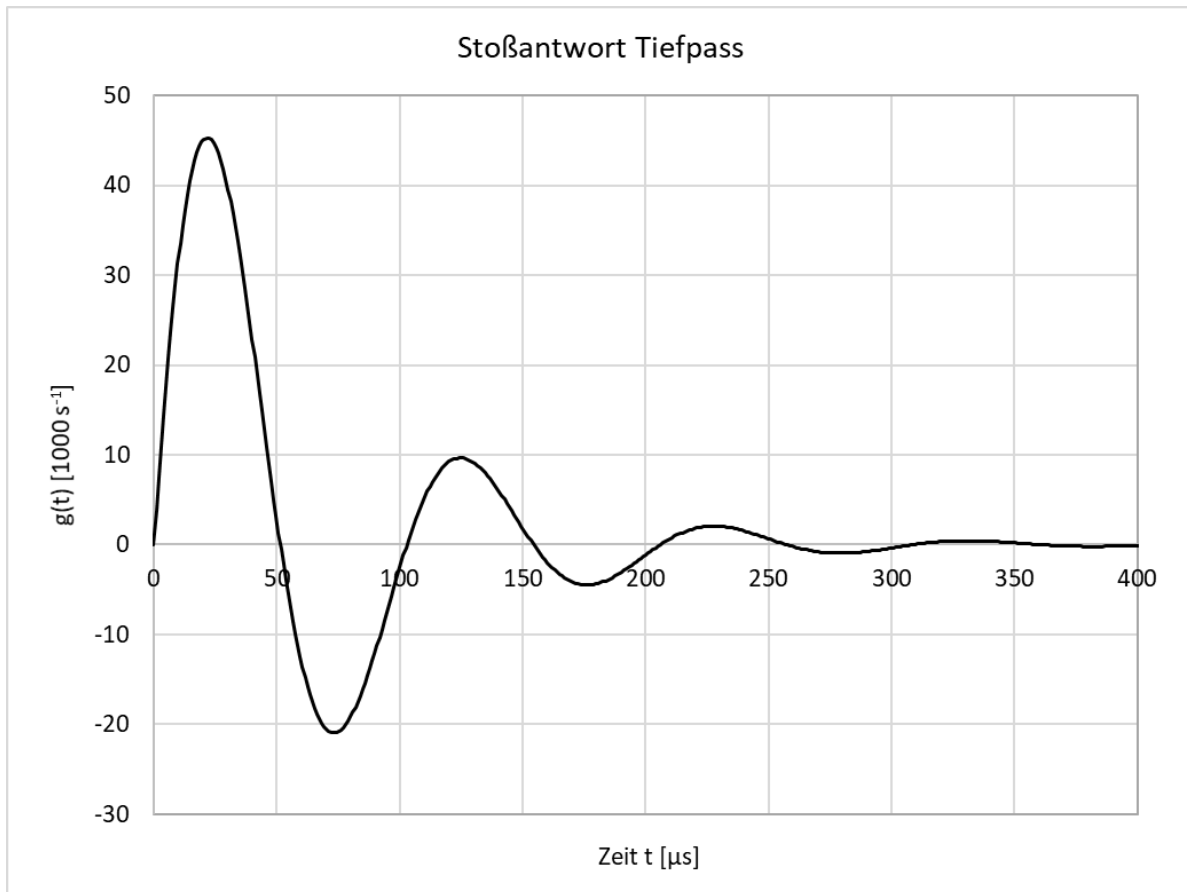


Abbildung 46: Stoßantwort eines Tiefpasses (Schwingungsfall)

Im folgenden Kapitel werden wir diese Stoßantwort direkt durch FFT-Rücktransformation aus dem (abgetasteten) komplexen Übertragungsfaktor berechnen. Dieses Verfahren funktioniert auch für den aperiodischen Grenzfall und den Kriechfall. Und es funktioniert für beliebig komplizierte Übertragungsfaktoren, für die die Fourier-Rücktransformation analytisch nicht mehr berechenbar ist.

10.4.2 Lösung via FFT

Zunächst müssen wir die Parameter T , Δt , f_a , Δf und N vorgeben.

Wir starten im Frequenzbereich und legen zunächst die Abtastfrequenz f_a fest. Nach dem Shannon-Theorem soll das Spektrum des Signals (hier der Übertragungsfaktor) keine Anteile $> f_a/2$ enthalten. Da es keine echte Bandbegrenzung gibt, wählen wir f_a wenigstens so groß, dass $|G(f > f_a/2)| < \epsilon$ ist. Wir wählen $\epsilon = 1\%$.

$$\left| G\left(\frac{f_a}{2}\right) \right| \approx \frac{1}{\left(\frac{f_a}{2f_r}\right)^2} < 1\% \Rightarrow f_a > 60 \cdot f_r$$

Nun geht es um die Festlegung von Δf und damit auch von T . Wir wollen verlangen, dass unterhalb der Resonanzfrequenz wenigstens 10 Frequenzastwerte liegen sollen (es könnten auch 20 sein), also

$$f_r = 10 \cdot \Delta f$$

Damit bekommen wir für die notwendige Abtastfrequenz:

$$f_a > 600 \cdot \Delta f$$

Wegen

$$f_a = N \cdot \Delta f \Rightarrow N > 600 \Rightarrow N = 1024 \text{ (nächstgrößere 2 - er Potenz)}$$

Zahlenwerte im Frequenzbereich:

$$\Delta f = \frac{f_r}{10} = 1 \text{kHz} \quad f_a = N \cdot \Delta f = 1024 \cdot 1 \text{kHz} = 1,024 \text{MHz}$$

Damit liegen auch die Parameter im Zeitbereich fest:

$$T = \frac{1}{\Delta f} = 1 \text{ms} \quad \Delta t = \frac{T}{N} = 0,9765 \mu\text{s}$$

Nun müssen wir die Werte der Übertragungsfunktion an den diskreten Frequenzen $k \cdot \Delta f$ in einem Excel-Sheet bereitstellen. Man kann das mit den oben angegebenen Zellen-Formeln für komplexe Zahlen machen. Das ist aber langwierig, da die Werte für $k > N/2$ die konjugiert komplexen Werte spiegelbildlich zu $N/2$ sein sollen. Wir haben deshalb eine eigene Zellen-Funktion geschrieben:

```
Function tp_von_f(k As Integer) As String
    Dim N As Integer
    Dim T As Double, f0 As Double, RC As Double, fr As Double
    Dim compl As String
    Dim ks As Integer

    RC = Tabelle6.Cells(2, 9).Value
    fr = Tabelle6.Cells(2, 5).Value
    N = Tabelle6.Cells(3, 2).Value
    T = Tabelle6.Cells(4, 2).Value

    f0 = 1 / T

    With Application.WorksheetFunction
        If k < N / 2 Then
            compl = .ImDiv(.Complex(1, 0),
                .Complex(1 - (k * f0 / fr) ^ 2, 2 * Pi * k * f0 * RC))
        ElseIf k = N / 2 Then
            compl = .ImDiv(.Complex(1, 0),
                .Complex(1 - (k * f0 / fr) ^ 2, 2 * Pi * k * f0 * RC))
            compl = .Complex(.ImReal(compl), 0#)
        ElseIf k > N / 2 Then
            ks = N - k ' N/2 -(k - N / 2) = N-k
            compl = .ImDiv(.Complex(1, 0),
                .Complex(1 - (ks * f0 / fr) ^ 2, 2 * Pi * ks * f0 * RC))
            compl = .ImConjugate(compl)
        Else
            End If
        compl = Replace(compl, ".", ",")
        tp_von_f = compl
    End With
End Function
```

Einzig direkter Input-Parameter ist der Index k der Frequenz. Zusätzlich liest die Funktion noch Werte aus dem Arbeitsblatt, welche natürlich ebenfalls als Parameter übergeben werden könnten. Die Funktion berechnet für $k \leq N/2$ den Frequenzgang als komplexe Zahl genau nach Gl (41). Für $k > N/2$ wird das Spiegel- k berechnet und der Wert an dieser Frequenzstelle konjugiert komplex eingetragen.

Die so berechneten diskreten Werte der komplexen Übertragungsfunktion werden als Import-Parameter einer inversen FFT mit jeweils 1024 Stützstellen benutzt. Die Ergebniswerte sind eigentlich

reell, werden aber als komplexe Zahl ausgegeben. Wir nehmen den Realteil davon und multiplizieren diesen noch mit N und Δf .

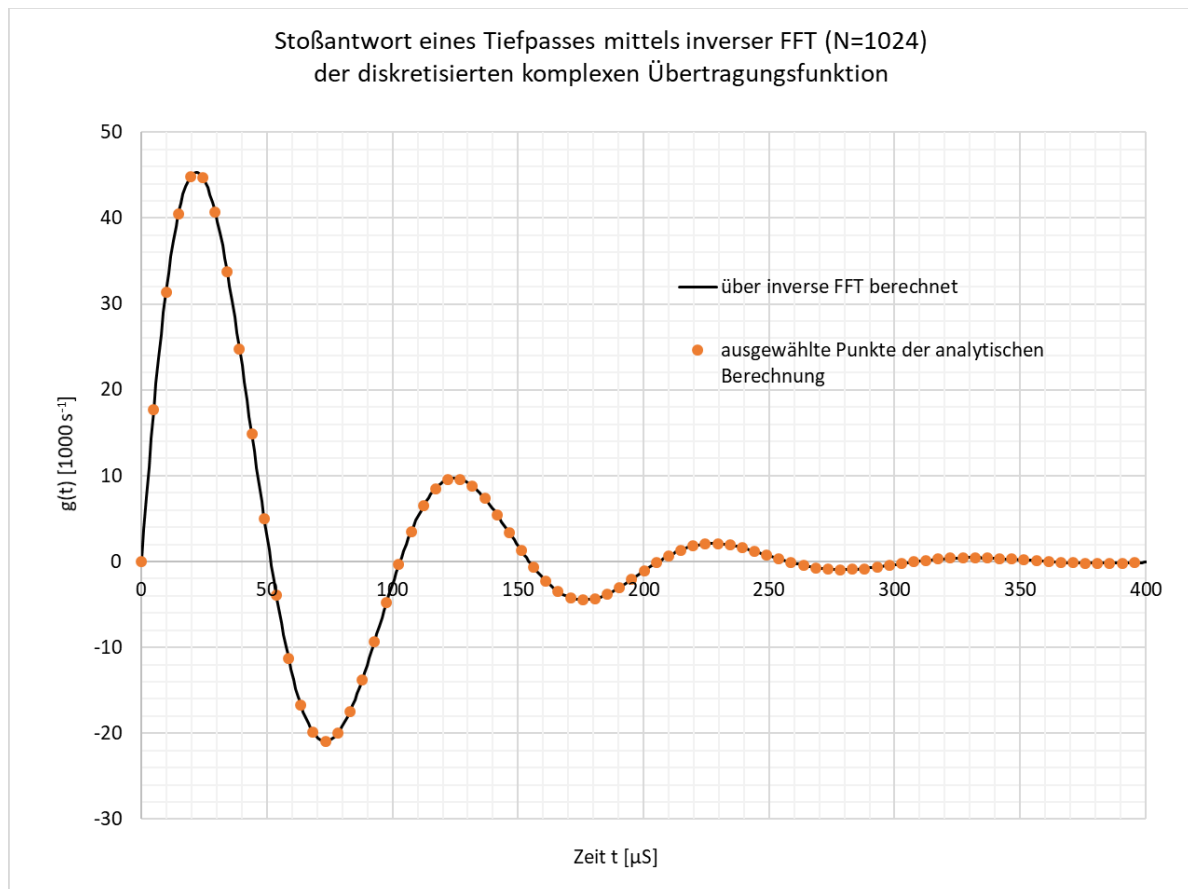


Abbildung 47: Berechnung der Stoßantwort eines Tiefpasses 2. Ordnung über die inverse FFT der Übertragungsfunktion

Zum Vergleich wurden in Abbildung 47 neben dem Resultat der inversen FFT (durchgezogene Kurve) noch punktweise die analytisch berechneten Werte eingetragen. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

BEACHTEN:

Wegen der Vorgaben im Frequenzbereich ergab sich $T = 1\text{ms}$. Nur ein Drittel davon wird aber von $g(t)$ beansprucht. Der Rest ist praktisch mit Nullen belegt. Das Ergebnis ändert sich nicht signifikant, wenn man mit 512 statt 1024 Tastwerten arbeitet.

Die (scheinbar) hohen Werte $g(0)$ mit 45.000 s^{-1} erklären sich so: Das Integral über die gesamte Zeitfunktion $g(t)$ muss 1 sein, denn

$$G(0) = 1 = \int_{t=0}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j0t} dt = \int_{t=0}^{\infty} g(t) \cdot dt$$

Wenn man in Abbildung 47 die Fläche unter $g(t)$ (vorzeichenrichtig!) auszählt, dann kann man dieses Ergebnis grob bestätigen. Die kleinen Rechtecke zwischen den Hilfslinien haben jeweils eine Fläche von

$$dI = 10\ \mu\text{s} \cdot 2000 \cdot \text{s}^{-1} = 0,02$$

Man zählt in den Schwingungsbögen (ungefähr) folgende Anzahlen von Rechtecken:

$$\int_{t=0}^{\infty} g(t) \cdot dt \approx 0,02 \cdot (+67 - 28 + 16 - 8 + 4 - 2 + 1) = 0,02 \cdot 50 = 1$$

Natürlich kann man das auch streng integrieren.

Ein Vorteil der FFT-Methode liegt darin, dass man auch den Grenzfall und den Kriechfall ohne Änderungen damit behandeln kann – die Formel für $G(f)$ gilt für alle Parameterkombinationen. Hier die Ergebnisse dazu:

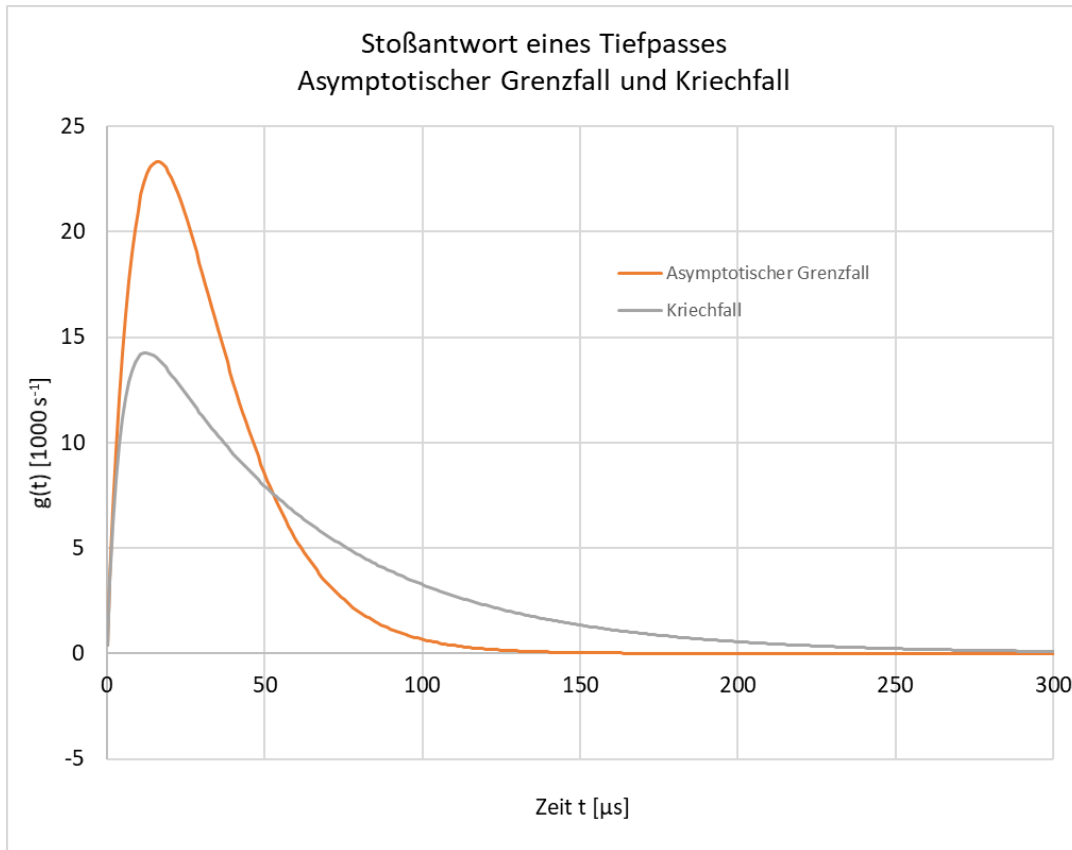


Abbildung 48: Stoßantwort eines Tiefpasses: Grenzfall und Kriechfall

11 Literatur

[Wiki Fourier Reihen] <https://de.wikipedia.org/wiki/Fourierreihe>

[Wiki Abtast] <https://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem>

[Wiki Gibbs] https://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches_Ph%C3%A4nomen