

Bewegung auf ebenen Kurven in Polarkoordinaten

Dr. Ulrich Mende

Inhalt

1	Definition der Polarkoordinaten	2
1.1	Vergleich mit und Unterschied zu kartesischen Koordinaten	2
1.2	Einheitsvektoren für Polarkoordinaten	2
2	Kurvenberechnungen in Polarkoordinaten	4
2.1	Längenberechnung in Polarkoordinaten	4
2.2	Flächenberechnung in Polarkoordinaten	5
3	Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten	6
3.1	Ableitung über kartesische Koordinaten	6
3.2	Ableitung durch Differentiation der Einheitsvektoren	7
3.3	Ableitung mit Hilfe komplexer Zahlen	8
4	Diverse Kurvengleichungen in Polarkoordinaten	9
4.1	Kreis	9
4.2	Archimedische Spirale	9
4.3	Logarithmische Spirale	11
4.4	Kegelschnitte	13
4.4.1	Eine Gleichung für alle Kegelschnitte	13
4.4.2	Kreis	13
4.4.3	Ellipse	13
4.4.4	Parabel	13
4.4.5	Hyperbel	15
4.5	Kreisevolvente	16
5	Elliptische Planetenbahnen in Polarkoordinaten	19
5.1	Kepler und Newton	19
5.2	Gleichung einer Planetenbahn in Polarkoordinaten	19
5.3	Berechnung der Beschleunigungen einer elliptischen Planetenbahn	21
5.3.1	Umfangsbeschleunigung a_φ	21
5.3.2	Radialbeschleunigung a_r	22
5.4	Berechnung der Geschwindigkeiten auf einer elliptischen Planetenbahn	22
6	Literatur	24

1 Definition der Polarkoordinaten

1.1 Vergleich mit und Unterschied zu kartesischen Koordinaten

In einem ebenen Kartesischen Koordinatensystem werden Punkte durch ihre x- und ihre y-Koordinate eindeutig beschrieben. Vereinfacht gesagt lautet die Vorschrift zum Erreichen des Punktes: Gehe x Schritte in Richtung x, dann y Schritte in Richtung y. Unabhängig davon, wo man sich befindet, sind die x- und die y-Richtungen immer gleich. Die Ebene wird horizontal (dx) und vertikal (dy) gerastert.

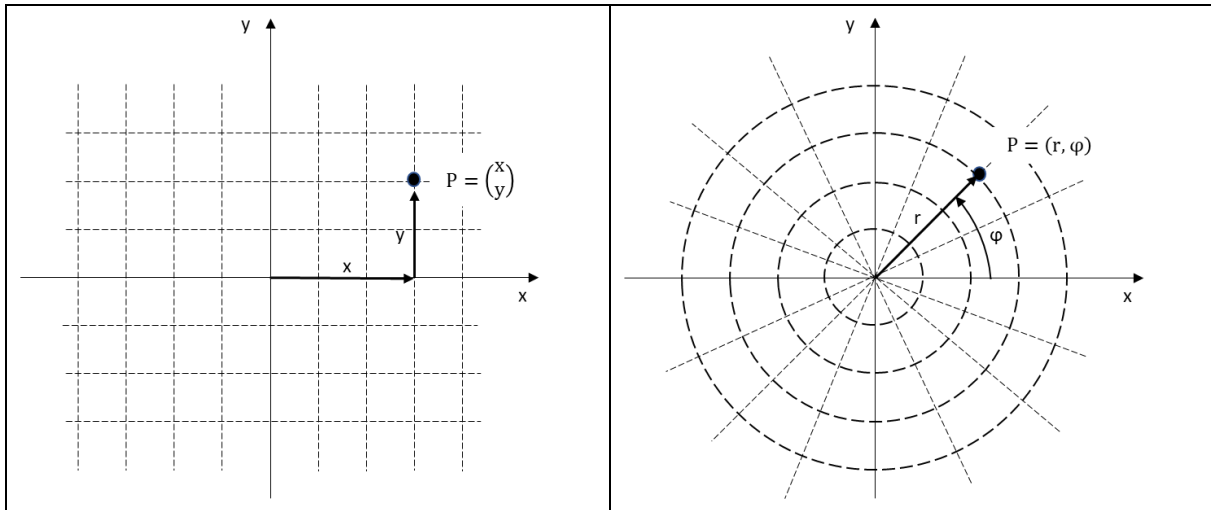


Abbildung 1: Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten

Bei Polarkoordinaten wird ein Punkt durch seinen Abstand vom Ursprung (Radius r) und durch den Drehwinkel (φ) beschrieben. Vereinfacht gesagt lautet die Vorschrift zum Erreichen des Punktes: Gehe r Schritte in Richtung φ .

1.2 Einheitsvektoren für Polarkoordinaten

Wenn sich ein Massepunkt auf einer Kurve $y(x)$ bewegt, so kann sein Ortsvektor (seine aktuelle Position) sowohl in kartesischen Koordinaten x und y als auch in Polarkoordinaten r und φ beschrieben werden:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$	1
--	---

Während x und y die Ebene in ein orthogonales Streckenraster aufteilen, bilden die Polarkoordinaten ein Netz aus konzentrischen Kreisen ($r=\text{konstant}$) und radialen Strahlen ($\varphi = \text{konstant}$). Jeder Punkt der Ebene liegt auf einem Schnittpunkt eines solchen Kreises mit einem Strahl.

Genau wie bei den kartesischen Koordinaten kann man bei den Polarkoordinaten orthogonale Einheitsvektoren bilden. Der Unterschied zu den kartesischen Koordinaten besteht darin, dass die Einheitsvektoren der Polarkoordinaten selbst vom Ort bzw. der Zeit abhängen. Der Einheitsvektor e_r zeigt immer in Richtung des anwachsenden Radius, e_φ zeigt immer in Richtung des zunehmenden Winkels und steht senkrecht auf e_r .

BEACHTEN: e_r ist *nicht* der Normalenvektor auf die Kurve im gegebenen Punkt; dementsprechend ist e_φ auch *nicht* der Tangentenvektor an die Kurve, sondern an die Koordinatenlinie $r=\text{konstant}$.

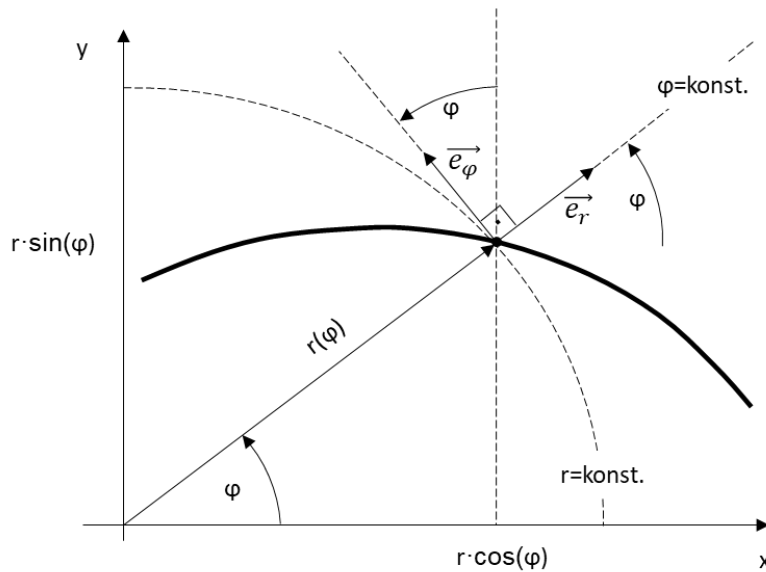


Abbildung 2: Kurve in Polarkoordinaten mit Einheitsvektoren

Wie man leicht an der obigen Darstellung abliest, gilt in kartesischen Koordinaten gilt für die Einheitsvektoren:

$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	2
--	---

Das Skalarprodukt beider Einheitsvektoren ist gleich Null.

In kartesischen Koordinaten gesehen beschreibt e_r einen Kreis mit dem Radius $r=1$. (Einheitskreis) Der Einheitsvektor e_φ ist dann der Tangenten-Einheitsvektor in dem Punkt, den e_r markiert. Wenn der Winkel φ zeitabhängig ist, dann sind auch beide Einheitsvektoren zeitabhängig, und man kann daher ihre Ableitungen bilden:

$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \omega \cdot \vec{e}_\varphi$	3
---	---

$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ -\dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = -\omega \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = -\omega \cdot \vec{e}_r$	4
--	---

Mit den Gl (3) und (4) ist eine sehr kompakte Ableitung der Beziehungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten möglich – s. 3.2.

2 Kurvenberechnungen in Polarkoordinaten

2.1 Längenberechnung in Polarkoordinaten

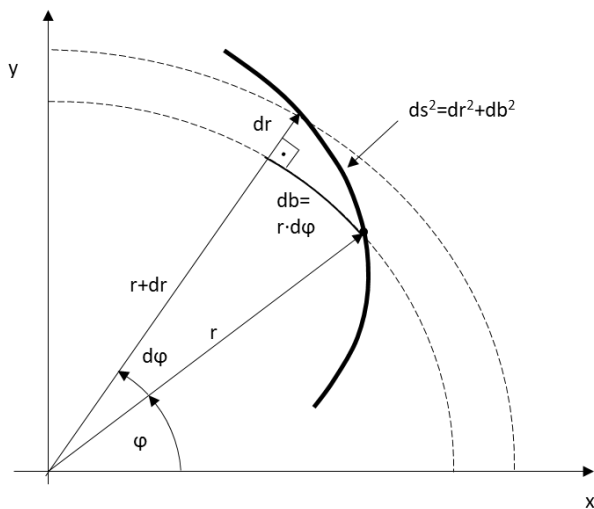


Abbildung 3: Ableitung der Formel für das Längenelement in Polarkoordinaten

Für immer kleiner werdende $d\varphi$ bekommt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten dr und db sowie der Hypotenuse ds .

$ds = \sqrt{dr^2 + db^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \cdot d\varphi$	5
---	---

Dieselbe Formel kann man aus dem bekannten Längenelement ds für kartesischen Koordinaten ableiten, wenn man dort die totalen Differentiale dx und dy in Polarkoordinaten einsetzt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow dx = \cos(\varphi) \cdot dr - r \cdot \sin(\varphi) \cdot d\varphi$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow dy = \sin(\varphi) \cdot dr + r \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi$$

$$dx^2 + dy^2 = (\cos(\varphi) \cdot dr - r \cdot \sin(\varphi) \cdot d\varphi)^2 + (\sin(\varphi) \cdot dr + r \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi)^2$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2$$

Die letzte Gleichung ist wieder die Gl (5).

2.2 Flächenberechnung in Polarkoordinaten

Zur Flächenberechnung betrachten wir die folgende Abbildung.

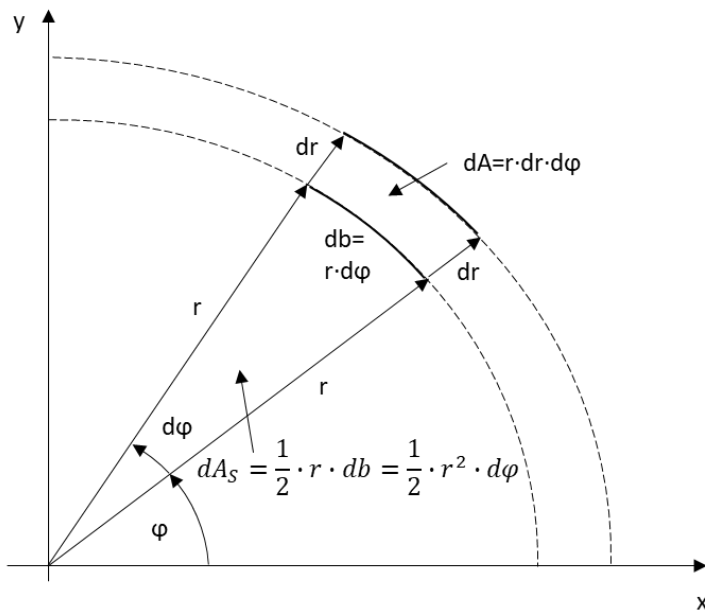


Abbildung 4: Differenzielle Flächenelemente in Polarkoordinaten

Das Flächenelement dA in Polarkoordinaten zwischen r und $r+dr$ sowie zwischen φ und $\varphi+d\varphi$ ist ein differenzielles Rechteck:

$dA(r, \varphi) = dr \cdot db = dr \cdot r \cdot d\varphi = r \cdot dr \cdot d\varphi$	6
--	---

Wenn man die Fläche desjenigen Sektors sucht, den eine Kurve $r(\varphi)$ mit den Winkelstrahlen $\varphi=\varphi_1$ und $\varphi=\varphi_2$ einschließt, so kann man diese Fläche aus unendlich vielen Kreissectoren vom Winkel $d\varphi$ zusammensetzen, die jeweils die differenzielle Fläche dA_S haben.

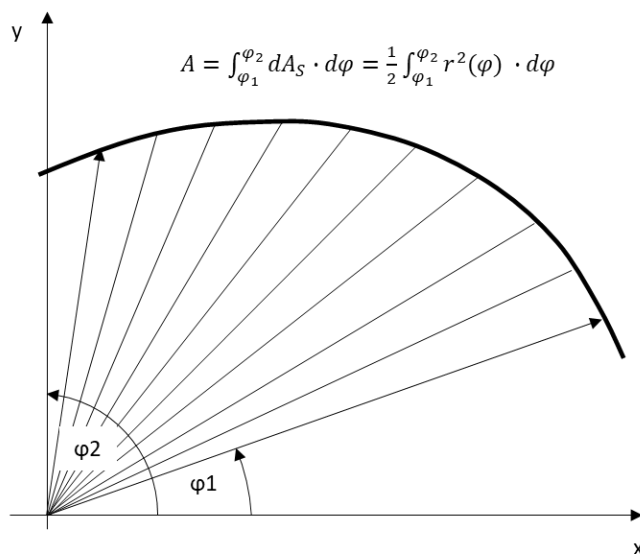


Abbildung 5: Flächeninhalt eines Kurvensektors

Dabei integriert man über alle Flächenelemente $dA(r, \varphi)$, die zwischen φ und $\varphi+d\varphi$ liegen:

$dA_S = \int_{r=0}^{r(\varphi)} r \cdot dr \cdot d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi$	7
---	---

Anders als bei der Flächenberechnung in kartesischen Koordinaten muss man hier auch bei negativen Funktionswerten keine negatives Vorzeichen in der Fläche beachten. Wenn man in Richtung zunehmender Winkel integriert, dann ist die Fläche immer positiv.

3 Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten

3.1 Ableitung über kartesische Koordinaten

Wenn wir uns für die Geschwindigkeit des Körpers auf seiner Bahn interessieren, dann müssen wir den Ortsvektor nach der Zeit ableiten. Dabei müssen wir die Produkt- und auch die Kettenregel für die trigonometrischen Funktionen des Winkels φ anwenden.

$$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d(r(t) \cdot \cos(\varphi(t)))}{dt} \\ \frac{d(r(t) \cdot \sin(\varphi(t)))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \\ \dot{r} \cdot \sin(\varphi) + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung kann man nach den vorher definierten Einheitsvektoren sortieren:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{r} \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$\vec{v}(t) = v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad v_r = \dot{r} \quad v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$	8
---	---

Damit hat man die Bahngeschwindigkeit des Körpers in zwei senkrechte Komponenten zerlegt. Dabei wirkt v_r immer radial entlang eines r -Strahls, und v_φ wirkt immer senkrecht zu diesem r -Strahl. Die Bezeichnung „tangential“ für v_φ sollte man vermeiden, da v_φ eben nicht tangential zur Kurve wirkt, sondern nur tangential zum Kreis, den der Radius r bildet.

Natürlich können beide Geschwindigkeitskomponenten positiv oder negativ oder auch Null sein.

Als Beispiel berechnen wir den Geschwindigkeitsvektor einer harmonischen Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\varphi(t) = \omega \cdot t \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega ; \quad r(t) = \text{konstant} = R \Rightarrow \dot{r}(t) = 0$$

Also

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \cdot \vec{e}_r + r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi = r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit ist immer in Richtung von \vec{e}_φ gerichtet; eine radiale Geschwindigkeit existiert auf dem Kreis nicht. Für diesen Sonderfall ist die Geschwindigkeit v_φ auch die Bahngeschwindigkeit v .

Nach demselben Verfahren kann man nun die Beschleunigungen auf der Bahn berechnen. Dazu werden wir die Produktregel für drei Faktoren benötigen, die wir hier kurz darstellen:

$$y(x) = a(x) \cdot b(x) \cdot c(x) \Rightarrow \ln(y) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$$

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \Rightarrow y' = y \cdot \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) = a' \cdot b \cdot c + a \cdot b' \cdot c + a \cdot b \cdot c'$$

Bei n Funktionen entstehen n Summanden mit jeweils allen n Funktions-Faktoren, von denen jeweils einer abgeleitet wird. Die Ableitung wird also von vorn nach hinten „durchgereicht“.

Zur Berechnung der Beschleunigung gehen wir wieder vom Vektor der Geschwindigkeit aus:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (\dot{r} \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi))$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \left(\ddot{r} \cdot \cos(\varphi) - \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) - (\dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) + r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) + r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi)) \right) \\ &= \left((\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \cos(\varphi) \right) + \left(-(r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \sin(\varphi) \right) \\ &= \left((\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \sin(\varphi) \right) + \left((r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \cos(\varphi) \right) \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= a_r \cdot \vec{e}_r + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ a_r &= \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r \cdot \omega^2 \\ a_\varphi &= r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega = r \cdot \alpha + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega \end{aligned}$	9
---	---

Die Radialbeschleunigung enthält die bekannte Zentripetalbeschleunigung, die die Masse bei konstantem r zum Drehpunkt hin beschleunigt. Sie ist dem Radius r und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit proportional. Zusätzlich gibt es ggf. eine echte radiale Beschleunigung.

Die Umfangsbeschleunigung enthält zunächst die bekannte Coriolis-Beschleunigung, die der radialen Geschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Zusätzlich gibt es hier ebenfalls eine Beschleunigung, die der Winkelbeschleunigung α proportional ist

Auch hier berechnen wir die Beschleunigungen bei einer harmonischen Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\varphi(t) = \omega \cdot t \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega; \ddot{\varphi}(t) = 0; \quad r(t) = \text{konstant} = R \Rightarrow \dot{r}(t) = 0; \ddot{r}(t) = 0$$

$$a_r = -R \cdot \omega^2; \quad a_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t) = -R \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_r$$

Die einzige Beschleunigung, die auf die Masse wirkt, ist die Zentripetalkraft, die die Masse auf die Kreisbahn zwingt.

3.2 Ableitung durch Differentiation der Einheitsvektoren

Unter Benutzung der Ableitung für die Einheitsvektoren nach den Gl (3) und (4) können wir die Gleichungen (9) in sehr kompakter Form mit Hilfe der Produktregel ableiten.

$$\vec{r}(t) = r \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} = \vec{a} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi) = \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \omega \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi \\ &= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot \omega \cdot (-\omega) \cdot \vec{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \cdot \omega^2) \cdot \vec{e}_r + (r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega) \cdot \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

3.3 Ableitung mit Hilfe komplexer Zahlen

Da wir ein ebenes Problem mit mehrfachen Ableitungen vor uns haben, können wir (vorübergehend) in die komplexe Schreibweise wechseln und benutzen dazu für die Polarkoordinaten die komplexe e-Funktion

$$P = x(t) + j \cdot y(t) = r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + j \cdot \sin(\varphi(t)) = r(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$$

Außerdem verwenden wir auch die Einheitsvektoren in komplexer Form:

$$\begin{aligned}E_r &= e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \\ E_\varphi &= e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = e^{j\varphi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j e^{j\varphi} = j \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = -\sin(\varphi) + j \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}$$

E_φ besitzt den Faktor j , der für die 90° -Drehung bezüglich E_r sorgt.

Für die komplexe Geschwindigkeit wird dann:

$$\begin{aligned}V &= \frac{dP}{dt} = \dot{r} \cdot e^{j\varphi} + j \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot e^{j\varphi} = (\dot{r} + j \cdot r \cdot \omega) \cdot e^{j\varphi} = (\dot{r} + j \cdot r \cdot \omega) \cdot E_r \\ &= \dot{r} \cdot E_r + r \cdot \omega \cdot E_\varphi\end{aligned}$$

Wenn man die komplexen Einheitsvektoren wieder durch die reellen Einheitsvektoren ersetzt, bekommt man das bereits bekannte Ergebnis.

Entsprechend können wir aus der komplexen Geschwindigkeit auch sofort die komplexe Beschleunigung ermitteln. Man beachte dabei, dass wir zunächst ein äußeres Produkt aus e-Funktion und Klammerausdruck haben. Im Imaginärteil in der Klammer steht wieder ein Produkt.

$$\begin{aligned}A &= \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} + j \cdot r \cdot \omega) \cdot e^{j\varphi} = (\ddot{r} + j \cdot (\dot{r} \cdot \omega + r \cdot \dot{\omega})) \cdot e^{j\varphi} + (\dot{r} + j \cdot r \cdot \omega) \cdot (j \cdot \omega) \cdot e^{j\varphi} \\ &= [(\ddot{r} - r \cdot \omega^2) + j \cdot (r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega)] \cdot E_r = (\ddot{r} - r \cdot \omega^2) \cdot E_r + (r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega) \cdot E_\varphi\end{aligned}$$

Der Übergang zu den reellen Einheitsvektoren liefert wieder das bereits vorher abgeleitete Ergebnis.

Insbesondere Elektrotechniker werden sich mit der komplexen Schreibweise anfreunden können, die auch in anderen Fällen gute Dienste leisten kann.

BEACHTEN:

Im Komplexen haben wir die komplexen Einheitsvektoren erst nach der zeitlichen Ableitung eingeführt.

4 Diverse Kurvengleichungen in Polarkoordinaten

4.1 Kreis

Der Kreis ist logischer Weise am einfachsten in Polarkoordinaten zu beschreiben, da der Radius r konstant ist. Die Entsprechung in kartesischen Koordinaten wären Geraden $x=\text{konstant}$ oder $y=\text{konstant}$.

$$r(\varphi) = R = \text{konstant} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = 0$$

Die Formeln für Kreisbogen und Kreissektor ergeben sich ganz einfach:

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + R^2} \cdot d\varphi = R \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = R \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow s(0, 2\pi) = 2\pi \cdot R = u$$

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{R^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow A(0, 2\pi) = \pi \cdot R^2$$

4.2 Archimedische Spirale

Von innen nach außen, beginnend bei $r=0$:

$$r(\varphi) = k \cdot \varphi; \quad k > 0, \quad 0 \leq \varphi < \infty$$

Von außen nach innen, beginnend bei $r=R$:

$$r(\varphi) = R - k \cdot \varphi; \quad k > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{R}{k}$$

Die folgende Abbildung 6 zeigt eine Archimedische Spirale mit fünf vollen Umdrehungen des Winkels φ . Der Parameter k hat den Wert $k=1/2\pi$. In der linken Variante wird die Spirale von innen nach außen durchlaufen, bei jeder vollen Umdrehung wächst der Radius um 1. In der Rechten Variante wird die Spirale von außen nach innen durchlaufen, der Anfangsradius ist 5. Der Radius nimmt bei jeder vollen Umdrehung um 1 ab. (Man beachte, dass die rechte Spirale spiegelbildlich zur linken Spirale bezüglich $y=0$ ist)

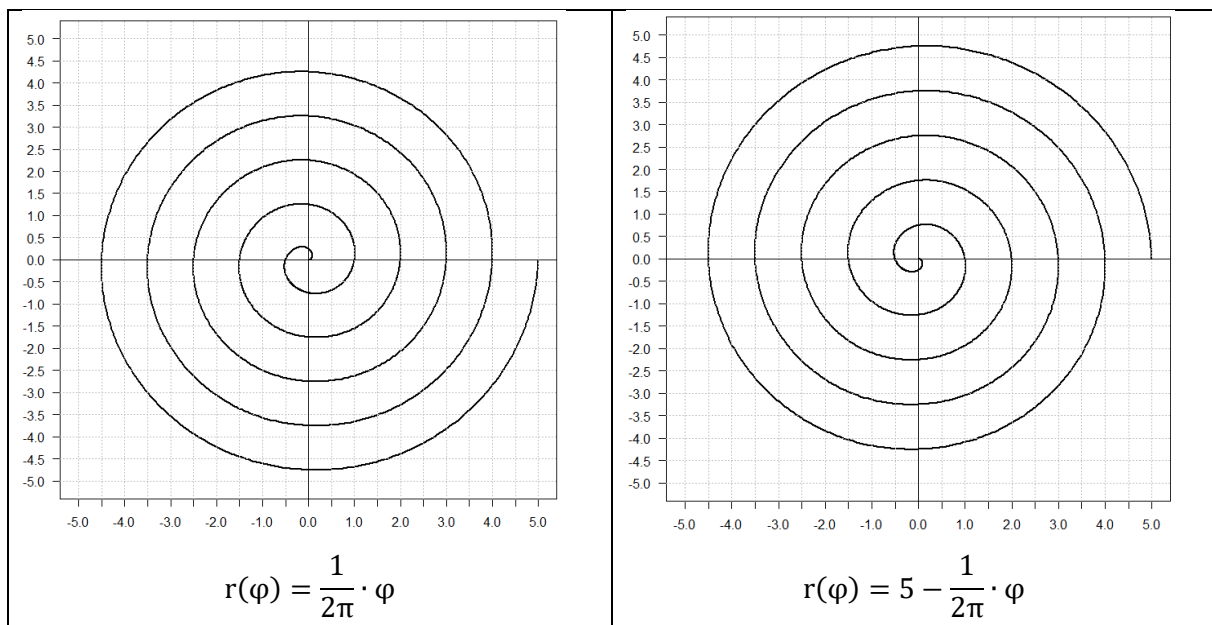


Abbildung 6: Archimedische Spiralen mit jeweils 5 vollen Windungen

Als Beispiel für eine Längenberechnung in Polarkoordinaten berechnen wir die Länge einer allgemeinen Archimedischen Spirale zwischen den Winkeln $[0, \varphi]$:

$$r(\varphi) = k \cdot \varphi \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = k$$

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{k^2 + k^2 \cdot \varphi^2} \cdot d\varphi = k \cdot \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2} \cdot d\varphi$$

Dieses Integral sieht einfach aus, ist aber schwer zu lösen. Wir nutzen den [Online-Integralrechner] und erhalten

DEINE EINGABE:
 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Beachte: Deine Eingabe wurde umgeschrieben bzw. vereinfacht.

Vereinfachen

PER HAND BERECHNETE STAMMFUNKTION:
 $\int f(x) dx = F^*(x) =$

Integration "per Hand" mit Rechenweg:
 Der Rechner leitet auf nachvollziehbare Weise eine Stammfunktion her. Beachte, dass diese wegen mancher Vereinfachungen nur in Teilbereichen gültig sein könnte.

$$\frac{\ln(|\sqrt{x^2+1}+x|) + x\sqrt{x^2+1}}{2} + C$$

Abbildung 7: Lösung des Integrals zur Längenberechnung einer Archimedischen Spirale

Also

$$s(\varphi) = \frac{k}{2} \left[\ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) + \varphi \cdot \sqrt{1 + \varphi^2} \right]$$

Wir berechnen die Zahlenwerte für die erste volle Umdrehung der Spirale, die danach genau den Wert $r=R$ hat.

$$k = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow s(2\pi) = \frac{R}{4\pi} \left[\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) + 2\pi \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2} \right] = 3,382 \cdot R$$

Wie die folgende Abbildung 8 bestätigt, ist das etwas mehr als die Hälfte des Umfanges des Kreises mit dem Radius R .

Für den Flächeninhalt der o.g. Archimedischen Spirale, die nach der ersten vollen Umdrehung gerade den Radius $r=R$ erreicht hat, bekommen wir:

$$r(\varphi) = k \cdot \varphi; \quad k = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow r(\varphi) = R \cdot \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow r(2\pi) = R$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cdot \varphi^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot d\varphi = \frac{R^2}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \pi R^2$$

Abbildung 8 zeigt, dass die Fläche gerade $1/3$ der Kreisfläche des Kreises mit demselben Radius R ist.

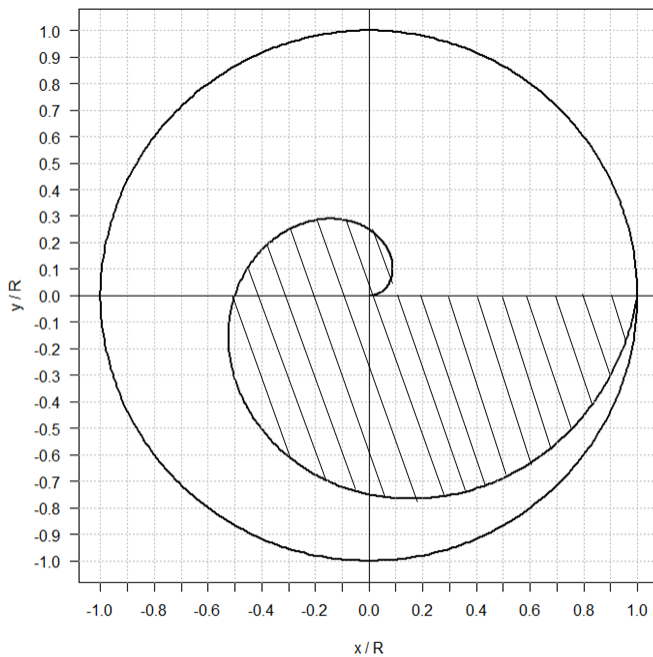


Abbildung 8: Berechnung der Länge und der Fläche der ersten Windung einer Archimedischen Spirale

4.3 Logarithmische Spirale

Der Radius einer solchen Spirale wächst exponentiell mit dem Winkel, der hier aber beliebige Werte annehmen kann. Die Spirale hat keinen (echten) Anfang und kein Ende.

$$r(\varphi) = R \cdot e^{k \cdot \varphi}; \quad k \neq 0, \quad -\infty \leq \varphi < \infty$$

$$r(\varphi + n \cdot 2\pi) = R \cdot e^{k(\varphi + n \cdot 2\pi)} = e^{k \cdot n \cdot 2\pi} \cdot R \cdot e^{k \cdot \varphi} = (e^{k \cdot 2\pi})^n \cdot r(\varphi)$$

Gibt man bei einem bestimmten Winkel φ eine oder zwei oder allgemein n weitere volle Umdrehungen der Spirale hinzu, so wird der Radius bei jeder Umdrehung um den konstanten Faktor $\exp(k \cdot 2\pi)$ erhöht. Möchte man z.B. erreichen, dass sich der Abstand der Windungen mit jeder Umdrehung verdoppelt, so muss man setzen:

$$e^{k \cdot 2\pi} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(2)}{2\pi} = 0,110$$

Die folgende Abbildung zeigt diese Spirale mit Verdopplung des Radius bei jeder vollen Windung. Dementsprechend schneidet die Spirale die x-Achse bei den Werten 1, 2, 4, 8, 16 und 32.

Für die Länge der Logarithmischen Spirale zwischen zwei Winkeln φ_1 und φ_2 erhält man mit Gl (5):

$$\frac{dr}{d\varphi} = R \cdot k \cdot e^{k \cdot \varphi} = k \cdot r \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{k^2 \cdot r^2 + r^2} \cdot d\varphi = \sqrt{1 + k^2} \cdot r \cdot d\varphi$$

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{1 + k^2} \cdot R \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{k \cdot \varphi} \cdot d\varphi = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k} \cdot R \cdot (e^{k \cdot \varphi_2} - e^{k \cdot \varphi_1}) = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k} \cdot (r_2 - r_1)$$

Damit ist die Kurvenlänge zwischen zwei Radien r_1 und r_2 der Differenz dieser Radien Proportional. Der oben berechnete Faktor k für eine Verdopplung der Radien gilt damit ebenso für eine Verdopplung der Kurvenlängen.

So ist die Länge der 4. Spirale, die entsprechend der Abbildung von $r=8m$ bis $r=16m$ geht:

$$s(3 \cdot 2\pi, 4 \cdot 2\pi) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (16\text{m} - 8\text{m}) = 9,146 \cdot 8 = 73,16 \text{ m}$$

Der nächste Bogen ist wegen der Verdopplung der beteiligten Radien ebenfalls doppelt so groß:

$$s(4 \cdot 2\pi, 5 \cdot 2\pi) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (32\text{m} - 16\text{m}) = 9,146 \cdot 16 = 146,33 \text{ m}$$

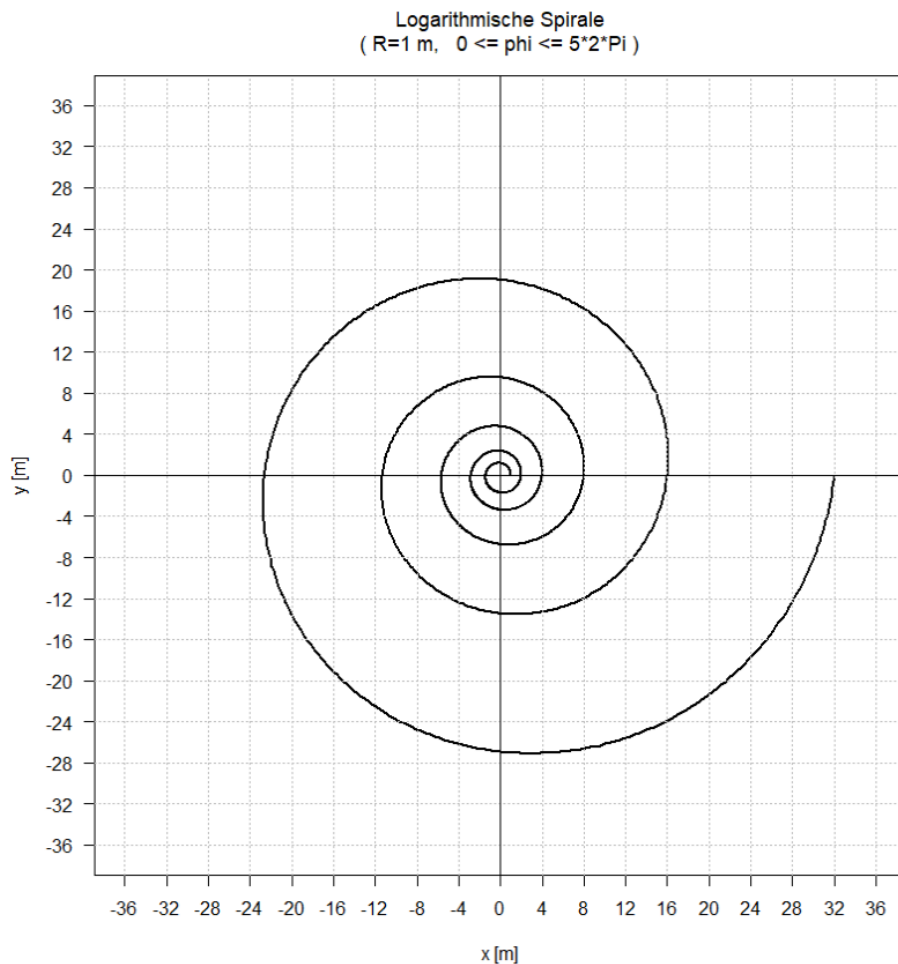


Abbildung 9: Logarithmische Spirale mit 5 Windungen und Abstandsverdopplung

Ähnliches gilt für die Flächenberechnung, nur dass dabei der Faktor quadriert werden muss:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{dr}{k \cdot r} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot dr \Rightarrow A(r_1, r_2) = \frac{1}{2 \cdot k} \int_{r_1}^{r_2} r \cdot dr = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{4 \cdot k}$$

So ist die Fläche unter der vierten Spirale:

$$A(8, 16) = \frac{16\text{m}^2 - 8\text{m}^2}{4 \cdot 0,11} = 436,3 \text{ m}^2$$

Und die Fläche unter der fünften Spirale ist viermal so groß:

$$A(16, 32) = \frac{32\text{m}^2 - 16\text{m}^2}{4 \cdot 0,11} = \frac{4 \cdot (16\text{m}^2 - 8\text{m}^2)}{4 \cdot 0,11} = 4 \cdot 436,3 \text{ m}^2 = 1.745,4 \text{ m}^2$$

4.4 Kegelschnitte

4.4.1 Eine Gleichung für alle Kegelschnitte

Es gibt eine einzige Gleichung in Polarkoordinaten, die für alle Kegelschnitte gilt:

$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$	<i>10</i>
--	-----------

Während der Faktor p eine Skalierung ist, bestimmt der Wert der sog. Exzentrizität ε die Art des Kegelschnittes.

4.4.2 Kreis

Beim Kreis gilt:

$$p = R; \quad \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = R = \text{konstant}$$

4.4.3 Ellipse

Bei der Ellipse hängen die Parameter p und ε von den Halbachsen a und b ab.

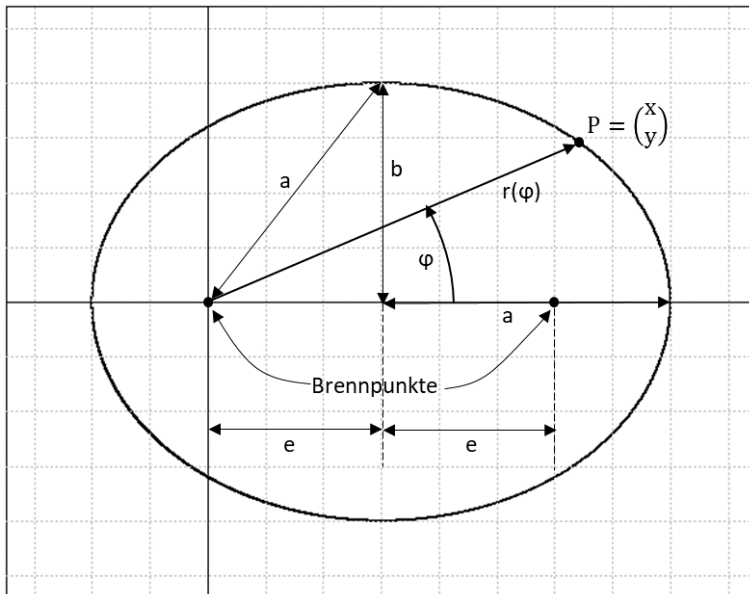


Abbildung 10: Ellipsengleichung in Polarkoordinaten

Aus a und b wird der halbe Abstand e der Brennpunkte berechnet. Die Exzentrizität ε ist ein relatives Maß für die Abweichung der Ellipse vom Kreis.

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} > 0; \quad \varepsilon = \frac{e}{a} < 1$$

Die große, physikalische Bedeutung der Ellipse als Bahnkurve von Planeten um Zentralgestirne wird im Kapitel 5 behandelt.

4.4.4 Parabel

Bei der Parabel entsteht als Grenzfall aus $\varepsilon \rightarrow 1$. Die Parameter der Ellipse (a , b , e) haben für die Parabel keine Bedeutung. Die Exzentrizität ε verschwindet als Konstante ebenfalls aus der Betrachtung, sodass p als einziger Parameter der Parabel übrigbleibt.

Dass Gl (10) tatsächlich eine Parabel beschreibt kann man leicht feststellen:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos(\varphi)} ; \cos(\varphi) = \frac{x}{r}; r^2 = x^2 + y^2$$

Also

$$r = \frac{p}{1 - \frac{x}{r}} \Rightarrow r - x = p \Rightarrow r = x + p$$

$$(x + p)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 2 \cdot p \cdot x + p^2 \Rightarrow y = \sqrt{2 \cdot p \cdot x + p^2}$$

Das ist eine um 90 Grad gedrehte quadratische Parabel, die hier als Wurzelfunktion auftritt. Die folgende Abbildung zeigt auch die geometrische Bedeutung des Parameters p:

Parabel als Sonderfall für eps = 1
(p = 2)

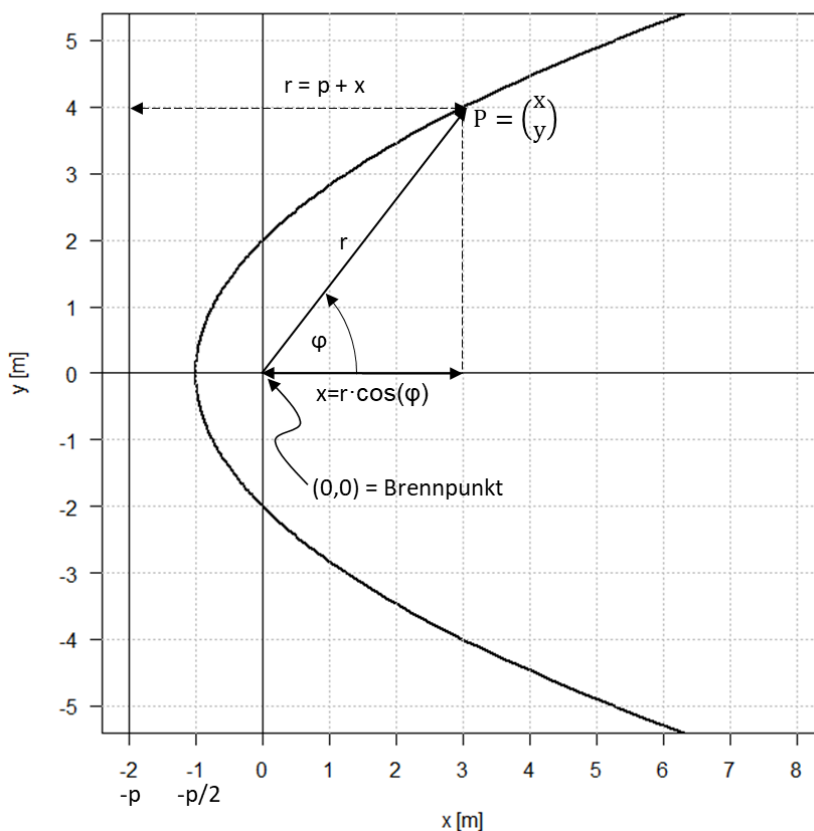


Abbildung 11: Parabel in Polarkoordinaten

Für $\varphi = \pi$ ergibt sich $r = -p/2$, also $x = r \cdot \cos(\pi) = -p/2$. (Scheitelpunkt).

Man kann hier auch die ursprüngliche Definitionsform der Parabel erkennen:

„Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt (Brennpunkt) und einer Geraden denselben Abstand haben.“

Die Gerade ist hier die Senkrechte durch $x = -p$. Der Punkt ist der Brennpunkt bei $(0,0)$. Der Radius $r(\varphi)$ der Polarkoordinaten ist gleich dem Abstand zur Geraden $x = -p$, also gleich der Summe aus p und $x = r \cdot \cos(\varphi)$.

BEACHTE:

Für $\varphi = k \cdot 2 \cdot \pi$ ist die Funktion nicht definiert, da hier $r \rightarrow \infty$ geht.

4.4.5 Hyperbel

Für die Hyperbel in Normallage (Ursprung im Schnittpunkt A der Asymptoten) gilt die bekannte Darstellung in Kartesischen Koordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Bei der Darstellung in Polarkoordinaten nach Gl (10) legt man den Ursprung des zugrunde liegenden kartesischen Systems in den Brennpunkt F; außerdem ist die Exzentrizität $\epsilon > 1$. Dadurch entsteht bei

$$\varphi_G = \pm \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

eine Polstelle, an der der Radius unendlich wird. Das ergibt zwei spiegelbildliche Arme der Hyperbel. Wir beschränken uns aber auf einen. Das folgende Bild zeigt die Zusammenhänge zwischen den Parametern a, b, c und p bzw. ϵ .

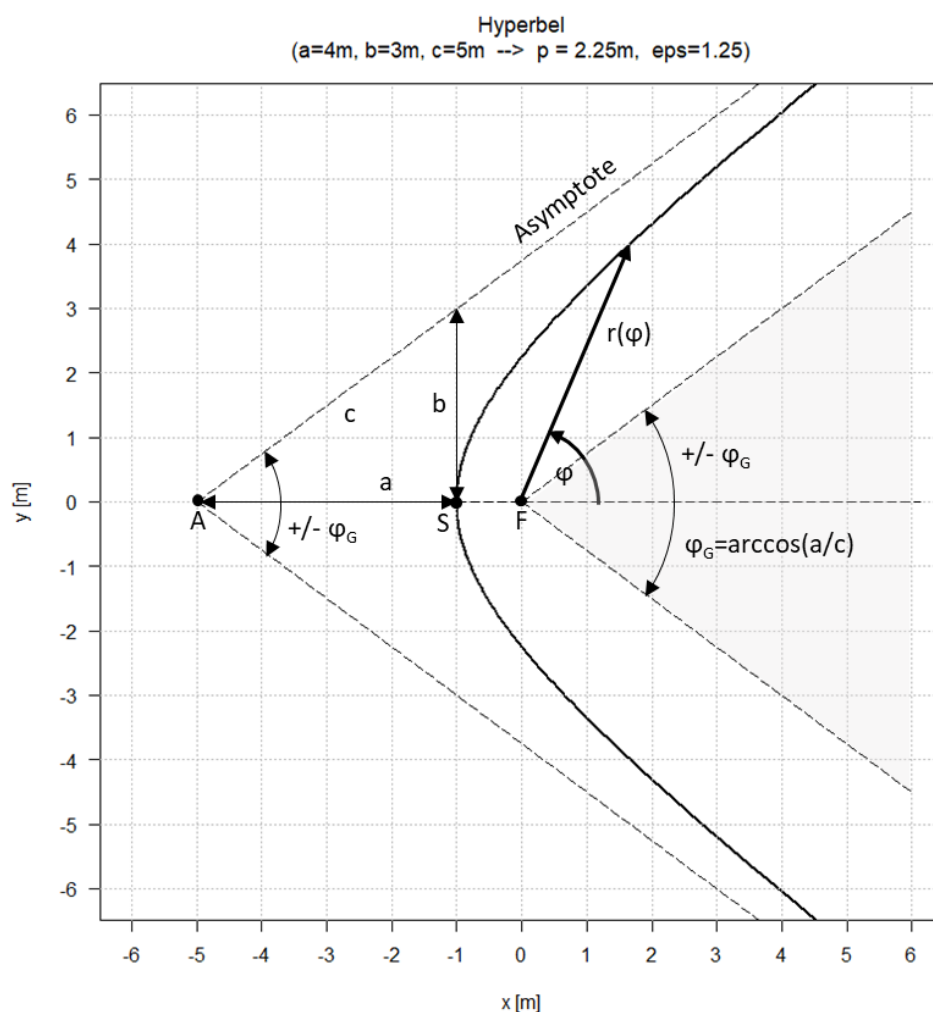


Abbildung 12: Hyperbel mit Kartesischen und Polarkoordinaten

In dem grau markierten Bereich liefert φ einen negativen r-Wert. Der Drehwinkel muss daher im Intervall $[\varphi_G \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi - \varphi_G]$ liegen.

In Polarkoordinaten liegt der Ursprung im Brennpunkt. Der Scheitelpunkt liegt dann bei $(-c+a)$, 0) und der Schnittpunkt der Asymptoten bei $(-c)$, 0).

Damit wird zunächst

$$\cos(\varphi_G) = \frac{1}{\epsilon} = \frac{a}{c} \Rightarrow \epsilon = \frac{c}{a} > 1$$

$$x_{\text{Scheitel}} = -(c - a) = r(\pi) \cdot \cos(\pi) = \frac{p}{1 + \epsilon} \cdot (-1) \Rightarrow p = a \cdot (\epsilon^2 - 1) = a \cdot \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right)$$

Umgekehrt lassen sich die Parameter a, b und c auch leicht aus p und ϵ berechnen:

$$a = \frac{p}{(\epsilon^2 - 1)}; \quad c = \frac{\epsilon \cdot p}{(\epsilon^2 - 1)}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

4.5 Kreisevolvente

Wenn man von einer Garnrolle einen Faden abwickelt, den man dabei stets straff gespannt hält, dann beschreibt der Anfangspunkt des abgewickelten Fadens eine Kreisevolvente.

Hier haben wir ein Beispiel von Polarkoordinaten in Parameterform vorliegen. Der Parameter für r und φ ist der abgewickelte Winkel α (Abbildung 13).

Der Parameter der Darstellung ist der Abwicklungswinkel α , der *nicht* mit dem Winkel φ der Polarkoordinaten identisch ist. Der Winkel α verbindet den Ursprung mit dem Tangentenpunkt T, an dem der abgewickelte Teil $b=R \cdot \alpha$ gerade tangential zum Kreis steht. Der Winkel φ verbindet den Ursprung über den Radius r mit dem Kurvenpunkt P.

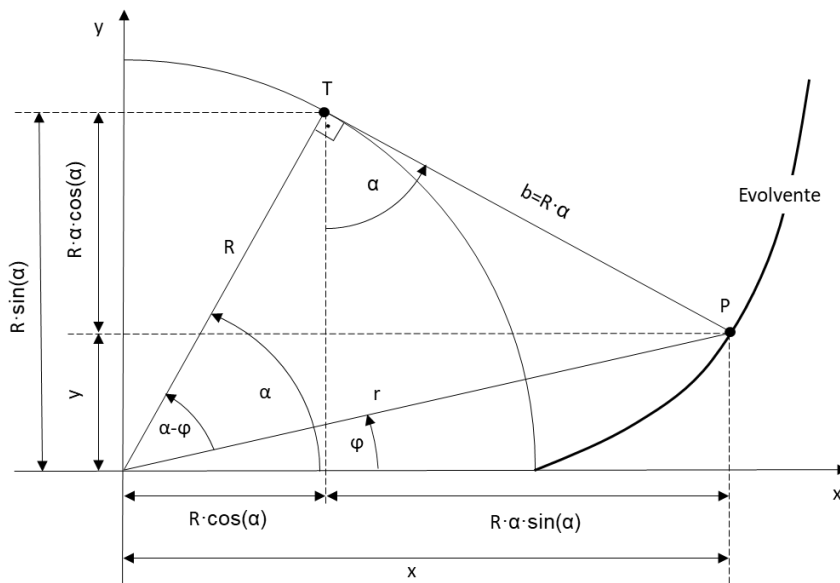


Abbildung 13: Ableitung der Gleichungen für die Kreisevolvente

Aus den Dreiecksbeziehungen liest man sofort ab:

$$x(\alpha) = R \cdot \cos(\alpha) + R \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) = R \cdot (\cos(\alpha) + \alpha \cdot \sin(\alpha))$$

$$y(\alpha) = R \cdot \sin(\alpha) - R \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha) = R \cdot (\sin(\alpha) - \alpha \cdot \cos(\alpha))$$

11

Einzelnes Quadrieren und dann summieren der Gl (11) ergibt die Formel für den Radius r der Polarkoordinaten. Dieser hängt nicht explizit von φ , sondern von Parameter α ab.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R \cdot \sqrt{1 + \alpha^2}$$

Für den Winkel φ bekommt man:

$$\tan(\alpha - \varphi) = \frac{R \cdot \alpha}{R} = \alpha \Rightarrow \varphi = \alpha - \arctan(\alpha)$$

Also lauten die Polarkoordinaten in Parameterform:

$r(\alpha) = R \cdot \sqrt{1 + \alpha^2} \qquad \varphi(\alpha) = \alpha - \arctan(\alpha)$	12
---	----

Interessant ist zunächst, dass sich die Gleichungen (12) für große Winkel α immer mehr einer Archimedischen Spirale annähern:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2} \approx \alpha \qquad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} r(\alpha) = R \cdot \alpha \approx R \cdot \varphi$$

Die folgende Abbildung zeigt eine Kreisevolvente mit $R=1$ und 3 vollen Umdrehungen. (Von einer Garnrolle mit dem Durchmesser 2cm wurden 3 volle Windungen Garn abgewickelt.)

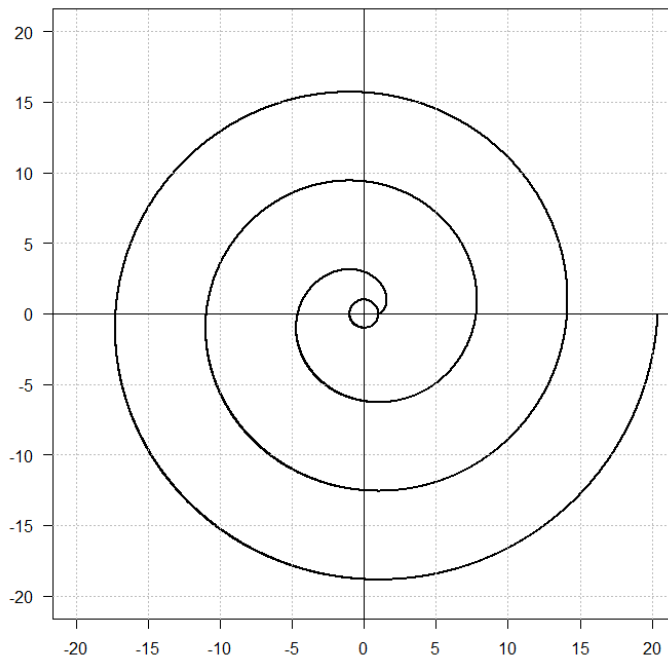


Abbildung 14: Kreisevolvente mit $R=1$ und 3 vollen Windungen

Für große Winkelwerte kann man die Evolvente nicht mehr von der Archimedischen Spirale unterscheiden.

Für den Bogen ds der Kreisevolvente bekommt man:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \cdot d\varphi = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha} \cdot d\alpha = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) \cdot d\alpha$$

Wir bilden die Ableitungen der Polarkoordinaten nach dem Parameter α :

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{R \cdot \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad ; \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha^2)} = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)}$$

Einsetzen liefert:

$$ds = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \alpha^2}{(1 + \alpha^2)} + R^2 \cdot (1 + \alpha^2)} \cdot \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot d\alpha = R \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2}} \cdot d\alpha = R \cdot \alpha \cdot d\alpha$$

Die Zunahme des Bogenstückes der Kreisevolvente ist also dem Bogen $R \cdot \alpha$ proportional. Mit genauem Hinsehen kann man das bereits an der Abbildung 13 erkennen. Der vom Tangentenpunkt T straff gespannte Faden beschreibt nämlich beim weiteren Abwickeln einen differentiellen Kreisbogen mit dem differentiellen Winkel $d\alpha$ um diesen Punkt T. Und dieser Kreisbogen hat als Radius genau die Länge des bereits abgewickelten Fadens, also

$ds = b \cdot d\alpha = R \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad \Rightarrow \quad s(\alpha) = R \cdot \int_{\alpha=0}^{\alpha} \alpha \cdot d\alpha = \frac{R \cdot \alpha^2}{2}$	13
--	----

Wir wollen als Beispiel die Länge der ersten vollen Umdrehung der Kreisevolvente mit $R=1$ berechnen.

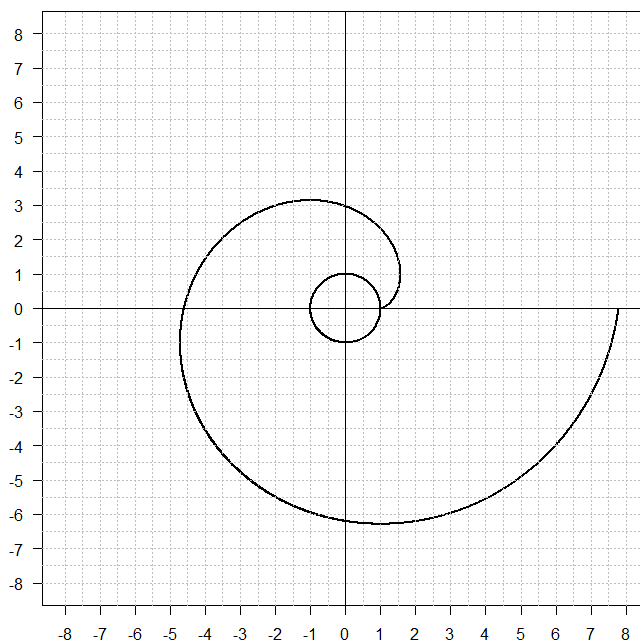


Abbildung 15: Längen- und Flächenberechnung an der Kreisevolvente

BEACHTE:

Die Integration für die Längenberechnung nach Gl (13) erfolgt über den Abwicklungswinkel α , der aber ist stets größer als die Polarkoordinate φ ist. Die Kurve zeigt aber die Punkte zu den Polarkoordinaten (r, φ) . Wenn man nun eine volle Umdrehung der Evolvente berechnen möchte, so bedeutet das $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Da das Integral in Gl (13) aber über α zu berechnen ist, muss man zunächst zur Bestimmung der oberen Integrationsgrenze α die nichtlineare Gleichung

$$\varphi = 2\pi = \alpha - \arctan(\alpha)$$

nach α auflösen. Die Lösung ist $\alpha = 7,725$ ($= 442^\circ = 360^\circ + 82,6^\circ$). [Brunner Nichtlineare Gleichungen]

Die erste volle Umdrehung der Evolvente ergibt eine Kurvenlänge von

$$s(\alpha = 7,725) = 2 \cdot R \cdot 7,725^2 = 29,8 \text{ m.}$$

Für die Fläche dA , die eine differentielle Änderung $d\alpha$ des Wälzwinkels ergibt, gilt:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (b \cdot d\alpha) = \frac{b^2}{2} d\alpha = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha^2 \cdot d\alpha \Rightarrow A(\alpha) = \frac{R^2}{2} \int_0^\alpha \alpha^2 \cdot d\alpha = \frac{R^2}{6} \alpha^3$$

BEACHTEN:

Die Integration läuft über den Wälzwinkel α . Die differentiellen Kreissektoren dA beginnen daher immer an der Peripherie des Kreises mit dem Radius R . Dieser gehört damit nicht zur berechneten Fläche.

Der Flächenwert ist:

$$A = \frac{(1\text{m})^2 \cdot 7,725^3}{6} = 76,8 \cdot \text{m}^2$$

Man bestätigt das Ergebnis grob durch Auszählen der Quadrate in Abbildung 15.

Eine interessante Aufgabe zu einer „umgekehrten“ Kreisevolvente findet sich unter [Mende Kugel an Schnur]. Dort ist eine Kugel mit einer Schnur an einem Pfahl befestigt. Beim Umlaufen der Kugel um den Pfahl wickelt sich die Schnur um den Pfahl und zieht die Kugel dabei immer dichter heran.

5 Elliptische Planetenbahnen in Polarkoordinaten

5.1 Kepler und Newton

Ende des 16. Jahrhunderts fand Kepler durch langwierige Bahnuntersuchungen, besonders am Planeten Mars, heraus, dass die Planeten sich in elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen, und dass die Sonne in einem der Brennpunkte steht. Er fand auch den sog. Flächensatz, nachdem der Verbindungsstrahl Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

Dabei wusste Kepler noch nichts von den Newtonschen Gesetzen, von der Gravitation und der Erhaltung des Drehimpulses.

Erst die Gravitationstheorie von Newton ermöglichte die exakte Ableitung der Planetenbahnen. [Zwei-Körper-Problem].

5.2 Gleichung einer Planetenbahn in Polarkoordinaten

Polarkoordinaten sind generell gut geeignet zur Beschreibung von Bewegungen von Teilchen in Kraftfeldern mit einer Zentralkraft, die stets in Richtung Ursprung gerichtet ist und nicht vom Winkel, sondern nur vom Abstand abhängt.

Wie man seit Newton weiß, ist die Gravitationskraft eine solche Kraft. Bei den gegebenen Masseverhältnissen Planet(en)/Sonne kann man die Sonne als festes Zentrum ansehen, das von den Planeten umkreist wird. Die Gravitations-Beschleunigung, die die Sonne auf einen umlaufenden Planeten ausübt, ist:

$$a = \frac{F}{m} = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \quad (M: \text{Sonnenmasse; } \gamma = \text{Gravitationskonstante})$$

Wenn wir ein Polarkoordinaten-System verwenden, bei dem die Sonne im Ursprung liegt, dann ist diese Beschleunigung in Polarkoordinaten:

$$\vec{a}_r = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_r = a_r \cdot \vec{e}_r$$

14

Für den Bahnradius r bekommen wir mit Gl (9) die folgende Differentialgleichung

$$a_r = \ddot{r} - r \cdot \omega^2 = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2}$$

15

Da diese einzige auf den umlaufenden Planeten wirkende Kraft immer radial und damit auf die Achse des Drehimpulses wirkt, kann sie diesen nicht ändern. Der Planet bewegt sich also mit konstantem Drehimpuls um die Sonne. Wenn man ihn – was aufgrund der großen Entfernungen möglich ist – als Punktmasse auffasst, dann gilt:

$$\frac{dL}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(m \cdot r^2 \cdot \omega) = m \cdot (2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \omega + r^2 \cdot \dot{\omega}) = m \cdot r \cdot (r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega)$$

Der Klammerausdruck in der letzten Gleichung ist gerade die Beschleunigung a_φ in Polarkoordinaten. Das ist die zweite DGL, die die unbekannte Bahngleichung beschreibt:

$$a_\varphi = r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega = 0$$

16

Zur Lösung der DGL-Systems (15) und (16) wird auf [Zwei-Körper-Problem] verwiesen. Als Lösungsfunktion ergibt sich die Gleichung der Kegelschnitte nach (10).

Wir wollen im Weiteren prüfen, ob die die Gl der Ellipse tatsächlich die beiden Gleichungen (15) und (16) erfüllt.

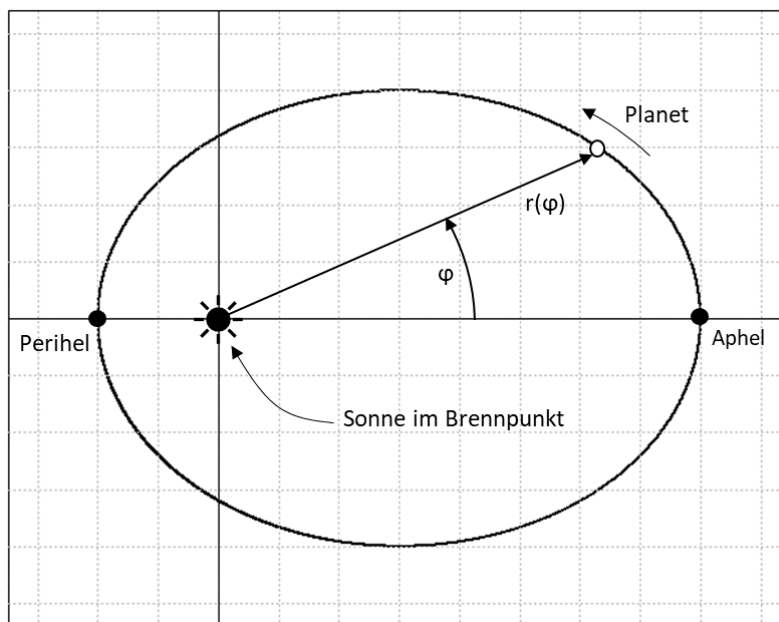


Abbildung 16: Elliptische Planetenbahn

Dabei steht die Sonne im linken Brennpunkt der Ellipse, der Koordinatenursprung liegt ebenfalls in diesem Brennpunkt.

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

Der Zusammenhang zwischen den Parametern p und ε der Polarkoordinaten zu den Parametern a und b der kartesischen Koordinaten ist im Abschnitt 4.4.3 dargestellt.

5.3 Berechnung der Beschleunigungen einer elliptischen Planetenbahn

5.3.1 Umfangsbeschleunigung a_ϕ

Zunächst gibt uns die Konstanz des Drehimpulses gibt eine Beziehung zwischen Radius r und Winkelgeschwindigkeit in jedem Punkt:

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{(L/m)}{r^2} = \frac{L \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi))^2}{p^2}$$

Um nicht in allen Gleichungen die Masse des Planeten mitzuführen, bezeichnen wir ab hier mit L den massebezogenen spezifischen Drehimpuls $L:=L/m$

$$a_\phi = r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega$$

Wir benötigen zur Berechnung die zeitlichen Ableitungen von r und von ω .

$$\frac{dr}{d\varphi} = r'; \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r' \cdot \omega; \quad \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega'; \quad \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega' \cdot \omega$$

Damit können wir a_ϕ auch über die Winkelableitungen an Stelle der Zeitableitungen ausdrücken:

$$a_\phi = r \cdot \dot{\omega} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega = r \cdot \omega' \cdot \omega + 2 \cdot r' \cdot \omega^2 = \omega \cdot (r \cdot \omega' + 2 \cdot r' \cdot \omega)$$

$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{(-1) \cdot p \cdot (-\varepsilon) \cdot (-\sin(\varphi))}{(1 - \varepsilon \cdot \cos(\varphi))^2} = -\frac{\varepsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi)$	17
--	----

$\omega' = \frac{d\omega}{d\varphi} = \left(\frac{L}{r^2}\right)' = -2 \cdot L \cdot \frac{r'}{r^3} = \frac{2 \cdot L \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varphi)}{p \cdot r}$	18
--	----

Also:

$$\begin{aligned} a_\phi &= \omega \cdot (r \cdot \omega' + 2 \cdot r' \cdot \omega) = \frac{L}{r^2} \cdot \left(r \cdot \frac{2 \cdot L \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varphi)}{p \cdot r} + 2 \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi) \right) \cdot \frac{L}{r^2} \right) \\ &= \frac{L^2 \cdot \varepsilon}{p} \cdot (2 \cdot \sin(\varphi) - 2 \cdot \sin(\varphi)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Wie verlangt verschwindet die Umfangsbeschleunigung an jeder Stelle der Ellipse, wenn man einen konstanten Drehimpuls voraussetzt. Dabei haben wir keine Annahme über die Größe der Exzentrizität ε gemacht. Bei Konstanz des Drehimpulses gilt auch für parabolische und hyperbolische Bahnen, dass die Umfangsbeschleunigung verschwindet.

Das ist auch gleichbedeutend damit, dass der von Kepler entdeckte Flächensatz für alle Kegelschnitt-Bahnen gilt, denn

$$dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot db = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (v_\varphi \cdot dt) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (r \cdot \omega) \cdot dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \omega = \frac{L}{2} = \text{konstant}$$

5.3.2 Radialbeschleunigung a_r

Nun berechnen wir die Radialbeschleunigung und erwarten, dass diese – wie von der Gravitationskraft bekannt und von der DGL (15) gefordert – proportional zu $-1/r^2$ ist:

$$a_r = \ddot{r} - r \cdot \omega^2$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d(\dot{r})}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (r' \cdot \omega)' \cdot \omega = (r'' \cdot \omega + r' \omega') \cdot \omega$$

$$\begin{aligned} r'' &= (r')' = \left(-\frac{\epsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi) \right)' = -\frac{\epsilon}{p} \cdot (2 \cdot r \cdot r' \cdot \sin(\varphi) + r^2 \cdot \cos(\varphi)) \\ &= \frac{2 \cdot \epsilon^2}{p^2} r^3 \sin^2(\varphi) - \frac{\epsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \left(\left(\frac{2 \cdot \epsilon^2}{p^2} r^3 \sin^2(\varphi) - \frac{\epsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \cos(\varphi) \right) \cdot \frac{L}{r^2} + r' \omega' \right) \cdot \frac{L}{r^2} \\ &= \left(\left(\frac{2 \cdot \epsilon^2 \cdot L}{p^2} r \cdot \sin^2(\varphi) - \frac{\epsilon \cdot L}{p} \cdot \cos(\varphi) \right) - \frac{2 \cdot \epsilon^2 \cdot L}{p^2} r \cdot \sin^2(\varphi) \right) \cdot \frac{L}{r^2} \\ &= -\frac{\epsilon \cdot L^2 \cdot \cos(\varphi)}{p \cdot r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \cdot \omega^2 = -\frac{\epsilon \cdot L^2 \cdot \cos(\varphi)}{p \cdot r^2} - r \cdot \frac{L^2}{r^4} = -\frac{L^2}{r^2} \cdot \left(\frac{\epsilon \cdot \cos(\varphi)}{p} + \frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{L^2}{r^2} \cdot \left(\frac{\epsilon \cdot \cos(\varphi)}{p} + \frac{(1 - \epsilon \cdot \cos(\varphi))}{p} \right) = -\frac{L^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{p} \right) = -\frac{L^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Wie erwartet ist die Radialbeschleunigung proportional zu $-1/r^2$ und damit immer zum Ursprung gerichtet (Minuszeichen).

Damit haben wir bestätigt, dass die Ellipse alle Eigenschaften der Bahnkurve eines einzelnen Planeten im Gravitationsfeld einer sehr schweren Masse (Sonne) erfüllt.

Zur Bestimmung einer konkreten Bahn (p und ϵ) müssen noch die Anfangsbedingungen bekannt sein, also z. B. Position und Geschwindigkeit des Planeten bei einem bestimmten Winkel. Auch dazu verweisen wir auf [Zwei-Körper-Problem].

5.4 Berechnung der Geschwindigkeiten auf einer elliptischen Planetenbahn

Man könnte vielleicht vermuten, dass die Geschwindigkeitskomponente v_φ konstant ist, da die Beschleunigung a_φ identisch Null ist. Das ist nicht der Fall, wie man sich leicht überlegen kann. Wenn der Planet in der größten Entfernung zur Sonne steht (Aphel), dann ist seine Bahngeschwindigkeit minimal, zeigt aber genau in Richtung e_φ . Und im sonnennächsten Punkt (Perihel) ist die Geschwindigkeit am größten, zeigt aber ebenfalls in Richtung e_φ . In beiden Positionen ist die Radialgeschwindigkeit = 0. Es gibt also auf jeden Fall eine zeitlich veränderliche Geschwindigkeit v_φ . Wir berechnen beide Komponenten nach Gl (8).

$$v_r = \dot{r} = r' \cdot \omega = -\frac{\epsilon}{p} \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{L}{r^2} = -\frac{\epsilon \cdot L}{p} \cdot \sin(\varphi) = -\frac{L}{p} \cdot \epsilon \cdot \sin(\varphi)$$

$$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega = r \cdot \frac{L}{r^2} = \frac{L}{r} = \frac{L}{p} \cdot (1 - \epsilon \cdot \cos(\varphi))$$

Für die Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Winkel bekommt man:

$$v = \frac{L}{p} \cdot \sqrt{(\epsilon \cdot \sin(\varphi))^2 + 1 - 2 \cdot \epsilon \cdot \cos(\varphi) + (\epsilon \cdot \cos(\varphi))^2} = \frac{L}{p} \cdot \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2 \cdot \epsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

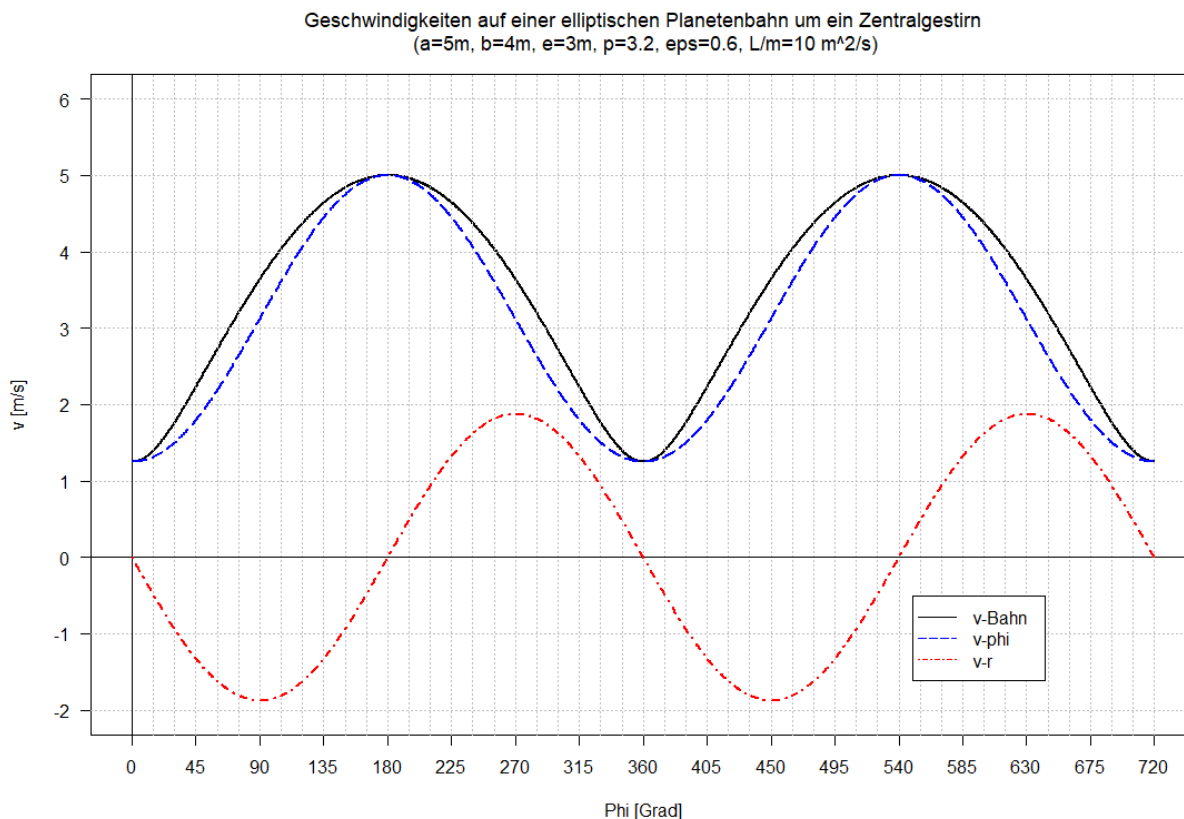


Abbildung 17: Geschwindigkeiten auf einer elliptischen Planetenbahn

Abbildung 17 zeigt die Geschwindigkeiten als Funktion des Winkels φ .

Die untere, rote Kurve (Strichpunkte) ist die Radialgeschwindigkeit. Sie ist negativ, wenn sich der Planet auf die Sonne zubewegt, wenn also r kleiner wird. Beim kleinsten r -Wert ist der sonnennächste Punkt (Perihel) erreicht, die Radialgeschwindigkeit ist Null und der Radius nimmt wieder zu, bis nach 360° der sonnenfernste Punkt (Aphel) erreicht ist und die Radialgeschwindigkeit wieder gleich Null ist.

Die blaue Strichlinie stellt die Geschwindigkeit v_φ dar. Sie ist stets positiv und ist eine echte Sinuskurve. Ihre Minimalwerte erreicht sie im Aphel, ihre Maximalwerte im Perihel. In ihren Maxima und Minima fällt sie mit der Bahngeschwindigkeit zusammen.

Die durchgezogene, schwarze Linie ist die Bahngeschwindigkeit. Sie ist keine Sinuskurve! Auf Grund der für kosmische Maßstäbe sehr hohe Exzentrizität der Beispiellipse ist auch der Unterschied zwischen Perihel- und Aphel-Geschwindigkeit sehr groß, nämlich:

$$\frac{v_{\text{Perihel}}}{v_{\text{Aphel}}} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} = \frac{1,6}{0,4} = 4$$

BEACHTEN:

Die Geschwindigkeiten addieren sich geometrisch nach dem Pythagoras, so gilt z.B. bei $\varphi = 270^\circ$:

$$v = \sqrt{1,9^2 + 3^2} = 3,55$$

6 Literatur

[Integralrechner Online] <https://www.integralrechner.de/>

[Brunner Nichtlineare Gleichungen]

<https://www.ardt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme2.htm>

[Zwei-Körper-Problem] <https://de.wikipedia.org/wiki/Zweik%C3%B6rperproblem>

[Mende Kugel an Schnur] [www.ulrich-mende.de/pdfs/Kugel an Wickelschnur L.pdf](http://www.ulrich-mende.de/pdfs/Kugel%20an%20Wickelschnur%20L.pdf)