

Einführung in die Strahlenoptik

Dr. Ulrich Mende

Inhaltsverzeichnis

1	Linsen und Strahlengänge	3
1.1	Sammel- und Zerstreulinsen - Fokussierung und Brennweite.....	3
1.1.1	Sammellinsen = Konvexlinsen	3
1.1.2	Zerstreulinsen = Konkavlinsen	3
1.1.3	Bündel paralleler Strahlen an Konkav- und Konvexlinsen.....	4
1.1.4	Dünne Linsen mit einer zentralen Hauptebene	5
1.1.5	Dicke Linsen mit zwei Hauptebenen	6
1.2	Sphärische Linsen und ihre Parameter.....	7
1.2.1	Linsenschleiferformel	7
1.2.2	Ableitung der Linsenschleifer-Formel für eine bikonvexe Linse	9
1.2.3	Plankonvexe Linse als Sonderfall einer bikonvexen Linse	12
1.3	Berechnung des exakten Strahlenganges einer bikonvexen Linse.....	12
1.4	Abbildungsgleichung für Konkav- und Konvexlinsen	18
1.4.1	Abbildungsgleichung für dünne Linsen	18
1.4.2	Abbildungsgleichung für dicke Linsen	19
1.5	Experimentelle Bestimmung von Linsenparametern.....	20
1.5.1	BESSEL-Formel zur Bestimmung der Brennweite dünner Linsen.....	20
1.5.2	ABBE-Verfahren zur Bestimmung der Hauptebenen und der Brennweite	21
2	Linsensysteme aus zwei dünnen Linsen.....	24
2.1	Systeme dünner Linsen - Ersatzlinse	24
2.1.1	Ableitung der Gleichung für die Systembrennweite	24
2.1.2	Bildseitige Hauptebene H'	25
2.1.3	Gegenstandsseitige Hauptebene H	26
3	Strahlenberechnung mit Matrizen	28
3.1	Vektoren und Matrizen in der Strahlenoptik	28
3.2	Translationsmatrix T	28
3.3	Brechungsmatrizen B	30
3.3.1	Brechung eines Strahls an einer ebenen Grenzfläche.....	30
3.3.2	Brechung eines Strahls an einer sphärischen Grenzfläche	31
3.3.3	Brechung eines Strahls an einer dünnen Linse.....	32
3.4	Berechnung der Brennweiten und der Hauptebenen aus einer Transfermatrix	33
3.5	Beispiele zu Transfermatrizen	35
3.5.1	Linsensystem aus zwei Linsen im Abstand $d = 0$	35
3.5.2	Linsensystem aus zwei Linsen im Abstand $d > 0$	35

3.5.3	Ableitung der Abbildungsgleichung mittels Matrizen.....	36
3.5.4	Strahlendurchgang durch eine plane optische Scheibe der Dicke d	38
3.5.5	Ableitung der Linsenschleiferformel über die Transfermatrix.....	39
4	Beispiel: Linsensystem mit beweglicher Sammellinse zur Fokussierung.....	40
4.1	Aufgabe.....	40
4.2	Lösung über das Zwischenbild der Konkavlinse.....	40
4.2.1	Berechnung des Zwischenbildes der Konkavlinse.....	41
4.2.2	Fokussierung des Zwischenbildes auf dem Sensor über die bewegliche Konvexlinse..	41
4.3	Lösung über die Methode der Ersatzlinse.....	44
4.3.1	Brennweite und Lage der Hauptebenen der System-Linse (=Ersatzlinse).....	44
4.3.2	Abbildungsgleichung der Systemlinse.....	45
4.3.3	Lösung der nichtlinearen Gleichung für b	46
4.4	Lösung über Transfermatrizen.....	46
4.4.1	Berechnung der Transfermatrix.....	46
4.4.2	Beaufschlagung der Transfermatrix mit Parallel- und Mittelpunktstrahl.....	47
4.5	Approximation der Übertragungsfunktion $b(a)$ durch eine Hyperbel (EXCEL-Solver).....	49

1 Linsen und Strahlengänge

Linsen sind neben Spiegeln die Wichtigsten Bauelemente optischer Geräte. Sie können über die Lichtbrechung den Strahlengang gezielt beeinflussen und damit Bildvergrößerungen oder Bildkorrekturen erreichen. Ihre Einsatzgebiete erstrecken sich von Brillen über Lupen, Fernrohre, Teleskope, Mikroskope, Kameras...

1.1 Sammel- und Zerstreuungslinsen - Fokussierung und Brennweite

1.1.1 Sammellinsen = Konvexlinsen

Sammellinsen sind solche, die einfallende, achsenparallele Strahlen im sog. Brennpunkt bündeln. Der Abstand dieses Punktes von der vertikalen Linsenachse ist konstant und wird als Brennweite bezeichnet. (Das heißt streng genommen nur für sehr dünne Linsen. Bei dickeren Linsen ist die Brennweite der Abstand zu den Hauptebenen).

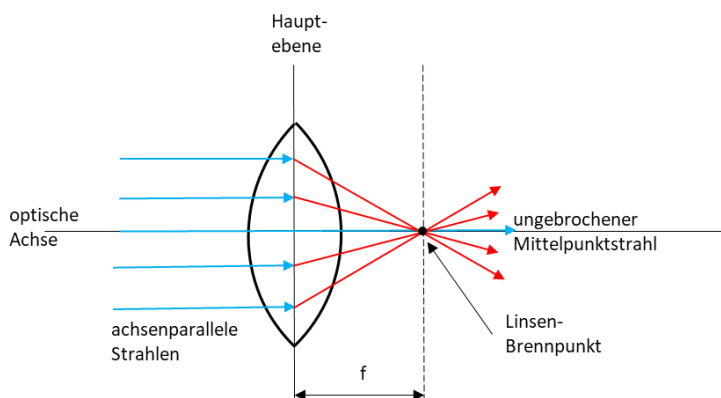


Abbildung 1: Brennweite einer Konvexlinse

Sammellinsen werden auch als Konvex-Linsen bezeichnet. (Eine alte Merksregel aus der Schule der Vorkriegszeit „Konvex – Podex“ ist selbsterklärend.)

Dieselbe Brennweite ergibt sich, wenn die Strahlen von rechts auf die Linse treffen; sie werden dann auf der linken Seite gebündelt.

Generell gilt daher für Sammellinsen: Parallelstrahlen auf der einen Seite ergeben Brennpunktstrahlen auf der anderen Seite. Die Umkehrung gilt ebenfalls. Strahlen durch den Brennpunkt auf der einen Linsenseite ergeben Parallelstrahlen auf der anderen Seite.

1.1.2 Zerstreuungslinsen = Konkavlinsen

Zerstreuungslinsen zerstreuen achsenparallel einfallende Strahlen so, als ob sie scheinbar aus einem Brennpunkt kämen. Zerstreuungslinsen werden auch als Konkav-Linsen bezeichnet.

Neben den zwei Grundformel (bikonvex und bikonkav) werden alle Kombinationen von Linsen verwendet: konvex-konkav, konkav-konvex, plan-konvex, plan-konkav.

Die abgebildeten Strahlengänge stellen Idealisierungen dar. Es gibt stets Abweichungen (Aberrationen) vom idealen Strahlenverlauf.

Generell gilt daher für Zerstreuungslinsen: Parallelstrahlen auf der einen Seite der Linse ergeben auf der anderen Seite divergente Strahlen, die scheinbar aus einem Brennpunkt auf der Seite der Parallelstrahlen kommen.

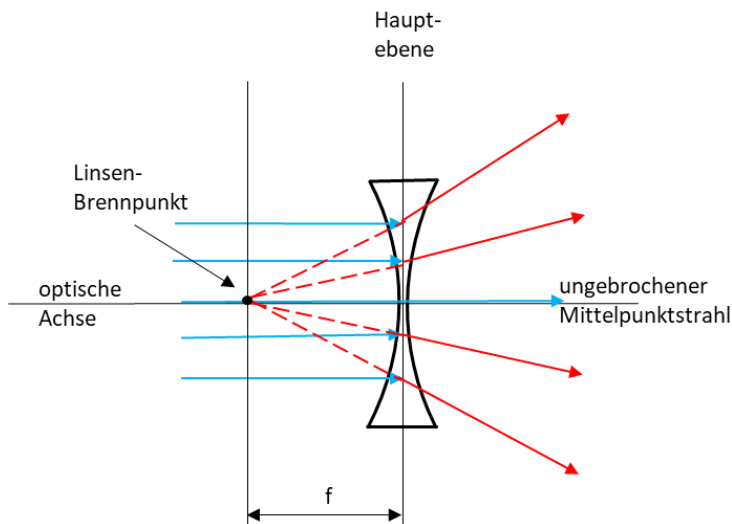


Abbildung 2: Brennweite einer Konkavlinse

1.1.3 Bündel paralleler Strahlen an Konkav- und Konvexlinsen

Die Brenn-Eigenschaften der Linsen gelten nicht nur für achsenparallele Strahlen, die sich in den Brennpunkten sammeln, sondern für beliebige Bündel paralleler Strahlen.

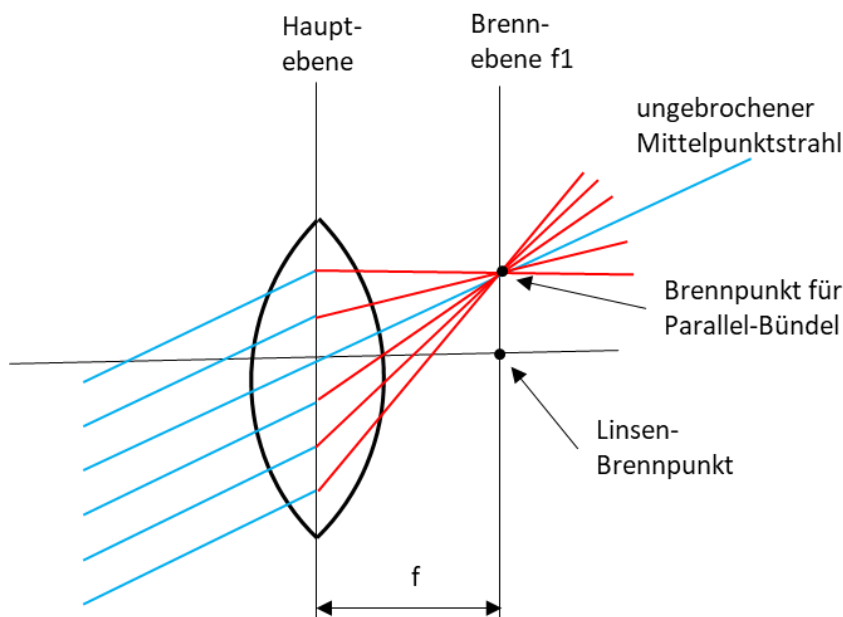


Abbildung 3: Brechung eines Bündels von Parallelstrahlen an einer Konvex-Linse

Diese sammeln sich in einem Punkt der Brennebene. Diese Brennebene steht wie die Hauptebene senkrecht zur optischen Achse und geht durch den Brennpunkt der Linse.

Der Sammelpunkt für das Bündel ergibt sich als Schnittpunkt des Mittelpunktstrahls, der dem Bündel parallel ist, mit der Brennebene.

Diese Betrachtungen sind nützlich, um den Verlauf eines beliebigen Strahls z.B. in einem System von Linsen zu ermitteln. Man betrachtet stets den zum Strahl parallelen Mittelpunktstrahl, ermittelt den Punkt in der Brennebene und daraus den Verlauf des gebrochenen Strahls.

Bei der Konvexlinse ergibt der Mittelpunktstrahl des Bündels den Schnittpunkt mit der Brennebene. Alle Strahlen des Bündels werden so gebrochen, dass sie bildseitig durch diesen Punkt verlaufen.

Bei der Konkavlinse werden die Schnittpunkte aller Strahlen des Bündels mit der Hauptebene rückwärts mit dem Brennpunkt für das Bündel verbunden und ergeben so die Richtungen für die gebrochenen Strahlen.

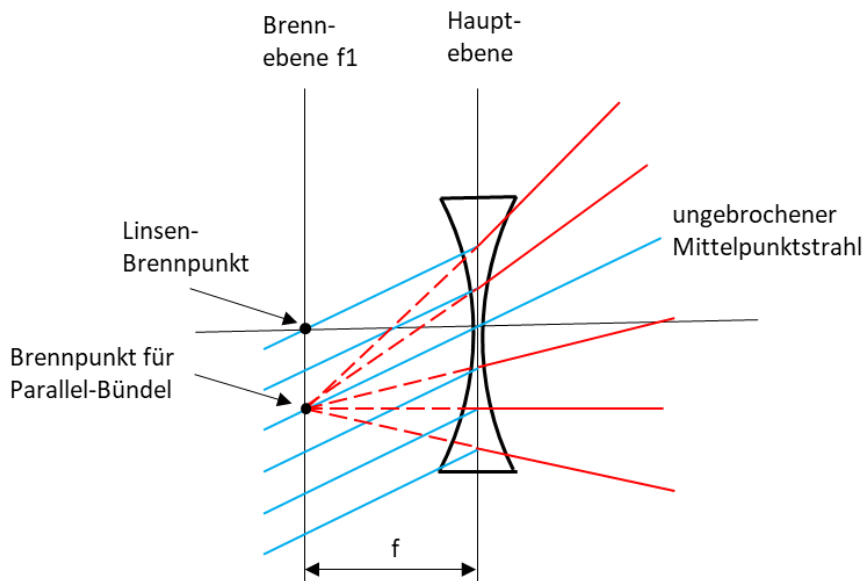


Abbildung 4: Brechung eines Bündels von Parallelstrahlen an einer Konkav-Linse

1.1.4 Dünne Linsen mit einer zentralen Hauptebene

Es wäre schwierig, bei komplexen Berechnungen an Linsensystemen jedes Mal die Brechung eines Strahls an einer gekrümmten Oberfläche zu berechnen. Unter bestimmten Bedingungen kann man Vereinfachungen vornehmen, die die Berechnung erheblich vereinfachen.

Bei dünnen Linsen kann man die doppelte Brechung (einfallender und ausfallender Strahl) durch eine einzige Brechung an einer zentralen Brechungsebene (=Hauptebene) ersetzen - Abbildung 5 .

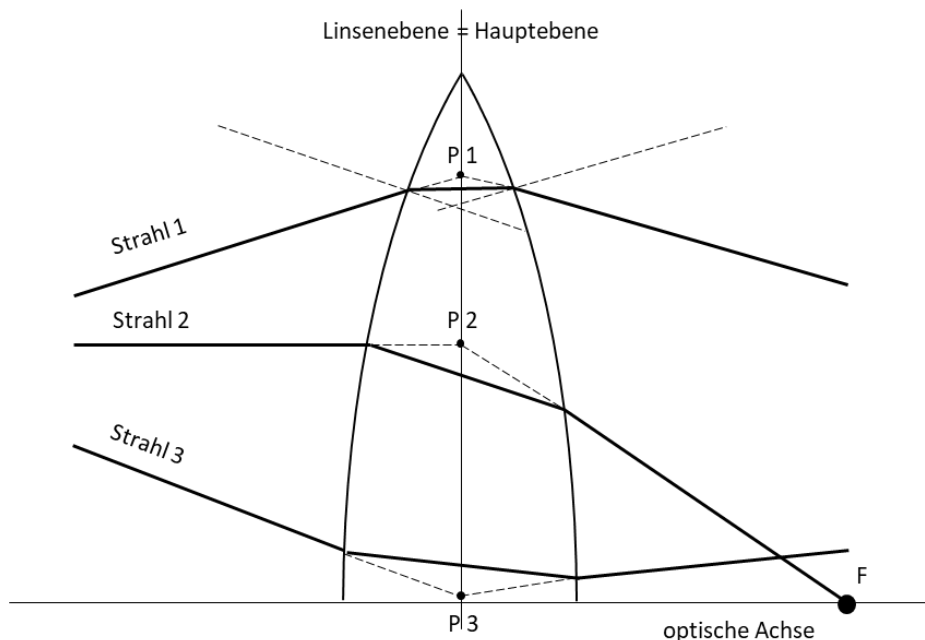


Abbildung 5: Ableitung der Hauptebene für eine dünne Linse

Alle drei in der Abbildung eingezeichneten Strahlen werden jeweils zweimal an der gekrümmten Linsenoberfläche gebrochen. Verlängert man den einfallenden und auch den auslaufenden Strahl

jeweils in Richtung Linsenachse, so entstehen die Schnittpunkte P1, P2 und P3. Diese Punkte bilden die Hauptebene der dünnen Linse, die senkrecht zur optischen Achse in der Linsenmitte steht.

Eine solche idealisierte Linse wird dann ausschließlich über ihre Brennweite beschrieben. Die Linsendicke kommt nicht mehr vor und kann bei der Berechnung vernachlässigt werden. Sowohl Gegenstands- als auch Bildweite beziehen sich auf diese Hauptebene. Alle Strahlen (außer dem Mittelpunktstrahl) erfahren nur eine Brechung an der ebenen Grenzfläche.

1.1.5 Dicke Linsen mit zwei Hauptebenen

Bei dickeren Linsen oder ganzen Linsensystemen arbeitet man mit einer objektseitigen und einer bildseitigen Hauptebene. Die objektseitige und die bildseitige Brennweiten stimmen überein, zumindest wenn vor und hinter der Linse dasselbe Medium vorliegt.

Die Hauptebenen stellen ein vereinfachtes, linearisiertes Berechnungsmodell des Strahlenganges für dicke Linsen dar. Die doppelte Brechung an zwei gekrümmten Linsenoberflächen wird ersetzt durch die einfache Brechung an der bildseitigen Hauptebene.

Die entscheidende Rolle für die Ermittlung der Hauptebenen sind die Parallelstrahlen. Ein objektseitiger Parallelstrahl schneidet die optische Achse nach zweifacher Brechung im bildseitigen Brennpunkt F' . Verlängert man diesen gebrochenen Strahl entgegen seiner Ausbreitungsrichtung, so schneidet er die Verlängerung der Parallelstrahls in einem Punkt, durch den die bildseitige Hauptebene H' geht. Diese steht senkrecht zur optischen Achse. Der senkrechte Abstand der Hauptebene H' vom Brennpunkt F' ist die bildseitige Brennweite f , die aber gleich der objektseitigen Brennweite f ist.

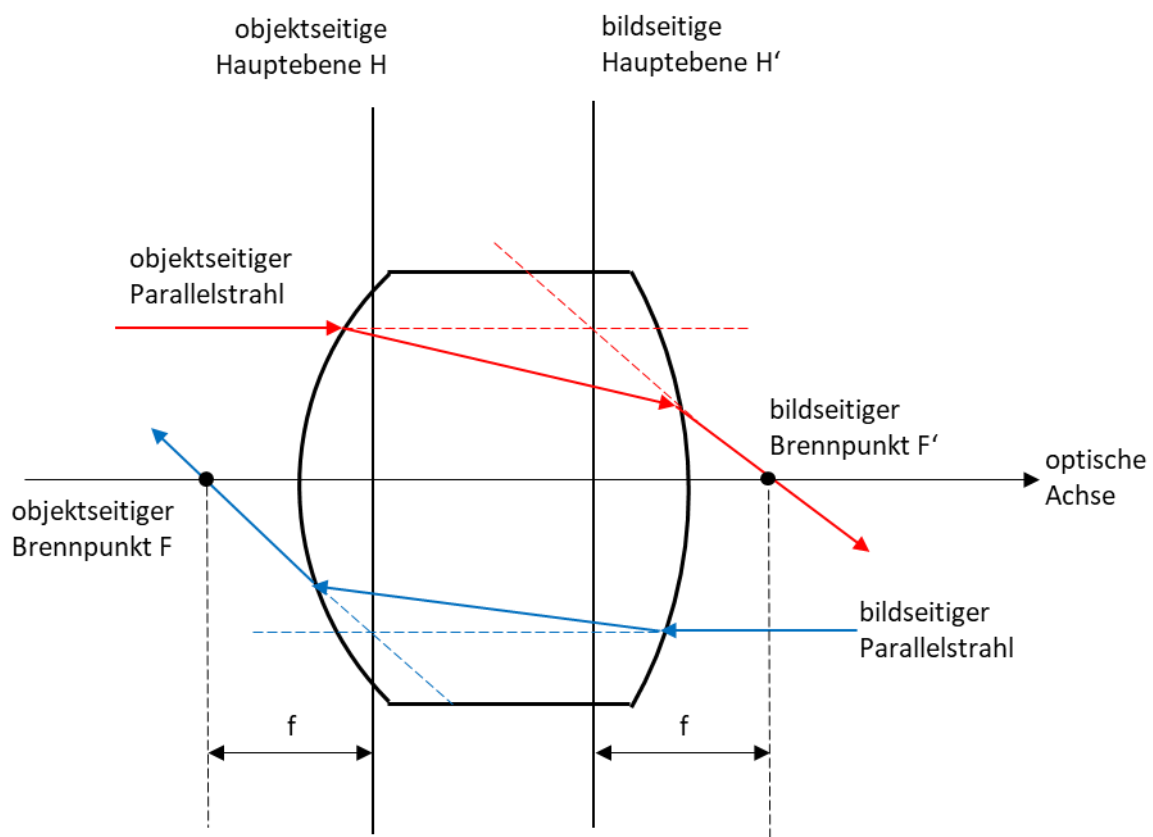


Abbildung 6: Dicke Linse mit zwei Hauptebenen

Analog dazu ermittelt man die Lage der objektseitigen Hauptebene H.

Wenn man eine konkrete Linsengeometrie vorzuliegen hat (z.B. sphärische Linsen), dann kann man daraus die Lage der Hauptebenen und die Brennweite bestimmen.

Es gibt unterschiedliche Verfahren, den Brennpunkt und die Brennweite experimentell zu ermitteln. (BESSEL-Verfahren, Parallel-Licht-Verfahren...[Brucherseifer])

1.2 Sphärische Linsen und ihre Parameter

1.2.1 Linsenschleiferformel

Sphärische Linsen haben Oberflächen, die Teile einer Kugeloberfläche sind. Sie sind besonders einfach herzustellen. Die folgende Abbildung zeigt eine Sammellinse mit zwei sphärischen Oberflächen, denen zwei unterschiedliche Schleifradien entsprechen:

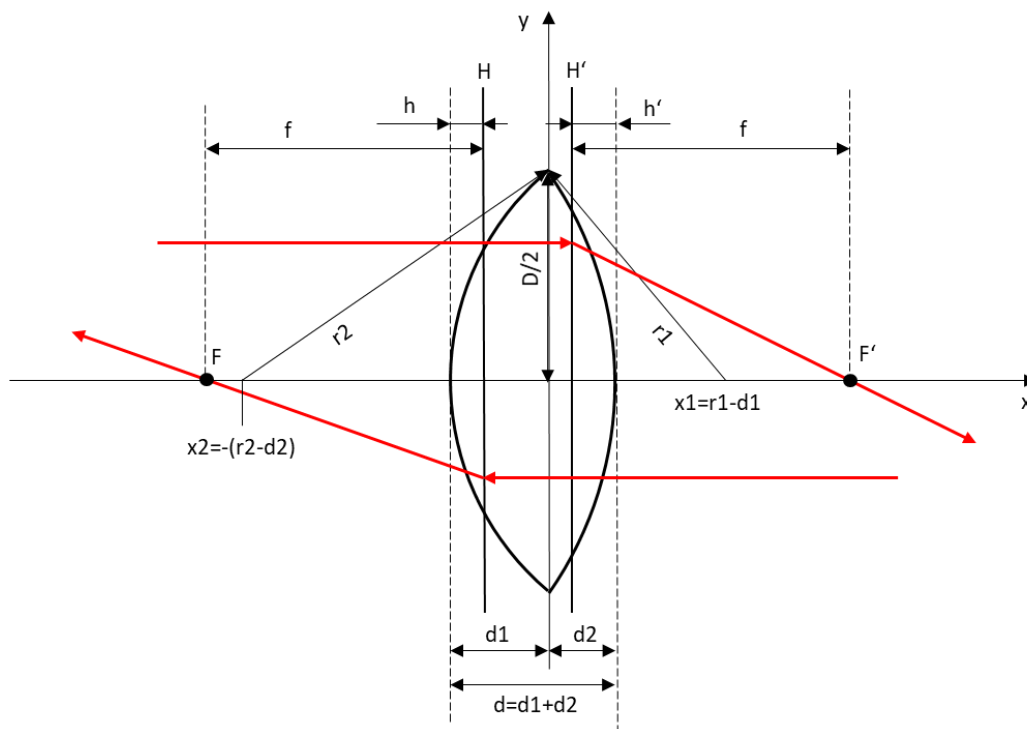


Abbildung 7: Angaben zur Linsenschleiferformel (aus: Wiki Linsenschleiferformel)

Die Brennweite der Linse berechnet sich aus den angegebenen Variablen so:

$\frac{1}{f} = \frac{n - n_0}{n_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot R_1 \cdot R_2} \right)$	1
--	---

Dabei sind n bzw. n_0 die Brechzahlen der Linse bzw. des umgebenden Mediums (Luft). Die Schleifradien sind vorzeichenbehaftet. Im abgebildeten Fall wäre R_2 negativ und R_1 positiv.

Zahlenbeispiel zur Abbildung:

$$R_1 = 4 \text{ cm}; \quad R_2 = -5 \text{ cm}; \quad d = 1 \text{ cm}; \quad n = 1,4; \quad n_0 = 1$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1,4 - 1}{1} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(-5)} + \frac{(1,4 - 1) \cdot 1}{1,4 \cdot 4 \cdot (-5)} \right) \frac{1}{\text{cm}} = \frac{0,174}{\text{cm}} \Rightarrow f = 5,73 \text{ cm}$$

Wenn man mit f_0 die Brennweite für verschwindende Linsendicke bezeichnet,

$$f_0 = \frac{n_0}{n - n_0} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

Dann lässt sich Gl (1) auch so schreiben (Beachte: $f_0 > 0$, da $R_2 < 0$)

$f = \frac{f_0}{\left(1 + \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot (R_2 - R_1)}\right)} \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot (R_2 - R_1)}\right)$	2
---	---

Den Ausdruck

$$-\frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot (R_2 - R_1)} = +\frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot (|R_2| + R_1)}$$

Kann man als relative Abweichung der Brennweite bei nichtverschwindender Dicke d bezüglich der Brennweite f_0 betrachten.

Für gleiche Radien $R_1 = R > 0$ und $R_2 = -R$, und $n_0 = 1$ (Luft) wird

$$f \approx f_0 \cdot \left(1 + \frac{(n - 1) \cdot d}{2 \cdot n \cdot R}\right); \quad f_0 = \frac{R}{2 \cdot (n - 1)} \approx R \quad \text{für } n = 1,5$$

Zahlenbeispiel aus [Wiki Sphärische Linsen]:

$R_1 = 100 \text{ mm}$; $R_2 = -100 \text{ mm}$; $d = 10 \text{ mm}$ ($d_1 = d_2 = 5 \text{ mm}$); $n = 1,5$

$$f = R \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{d}{R}\right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{10 \text{ mm}}{6 \cdot 100 \text{ mm}}\right) \text{ mm} = 100 \cdot (1 + 0,016) \text{ mm} = 101,69 \text{ mm}$$

Man beachte noch, dass bei unabhängiger Vorgabe von R und d der Durchmesser der Linse ebenfalls festliegt:

$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{(2 \cdot R)^2 - (2 \cdot R - d)^2}$$

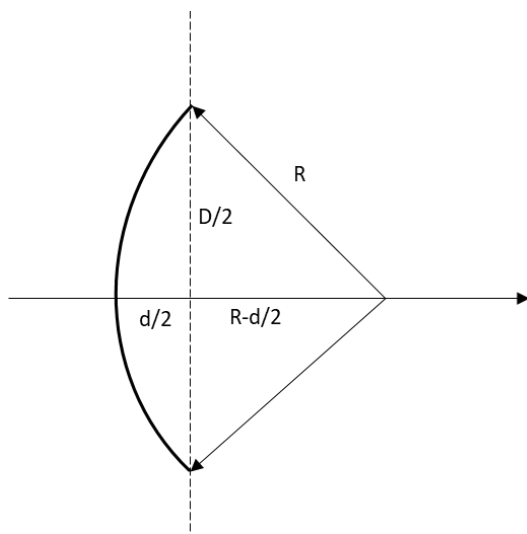


Abbildung 8: Zusammenhang zwischen Krümmungsradius R , Linsendicke d und Linsendurchmesser D

Im obigen Zahlenbeispiel wären das

$$D = \sqrt{200 \cdot 200 - (200 - 10)^2} \text{mm} = 62 \text{mm}$$

Die Größe der Brennweite allein ist zur Beschreibung der Linse nicht ausreichend, es gehört die Lage der beiden Hauptebenen (Hauptpunkte) dazu. Die Lage der Hauptpunkte berechnet sich über folgende Formeln, wobei die Längen jeweils vom Scheitelpunkt in Richtung Linsenmitte gemessen werden.

$$\text{Bildseite: } h' = \frac{(n - n_0)}{n} \cdot \frac{d \cdot f}{r_1}$$

$$\text{Gegenstandsseite: } h = \frac{(n - n_0)}{n} \cdot \frac{d \cdot f}{r_2}$$

Diese Formeln werden im folgenden Kapitel abgeleitet.

1.2.2 Ableitung der Linsenschleifer-Formel für eine bikonvexe Linse

Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, kann man keinen geschlossenen analytischen Ausdruck für die Brennweite einer dicken, sphärischen Linse angeben. Die o.g. Linsenschleifer-Formel nach Gl (1) gilt nur für die sog. paraxiale Strahlenoptik. Diese betrachten ausschließlich Strahlen, die nahen an der optischen Achse verlaufen und zudem nur kleine Winkel α mit dieser einschließen, für die gilt:

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) = \alpha$$

Wir betrachten einen Parallelstrahl zur optischen Achse, der die Linse im Punkt $E=(x_e, y_e)$ trifft. Da der Strahl sehr nahe an der x-Achse verlaufen soll, ist

$$x_e = -d_2$$

Die Normale auf der Linsenoberfläche in diesem Punkt hat den Anstiegswinkel

$$\sin(\varphi_1) = \varphi_1 = \frac{y_e}{r_1}$$

Der Parallelstrahl hat gegen diese Normale den Winkel α und der im Punkt E gebrochene Strahl den Winkel β .

$$\alpha = \varphi_1 = \frac{y_e}{r_1}; \quad \sin(\beta) = \frac{n_0}{n} \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{n_0}{n} \alpha$$

Der Winkel γ , den der gebrochene Strahl in der Linse gegen die Horizontale hat, ist:

$$\gamma = \alpha - \beta = \alpha - \frac{n_0}{n} \alpha = \frac{(n - n_0)}{n} \cdot \alpha = \frac{(n - n_0)}{n} \cdot \frac{y_e}{r_1}$$

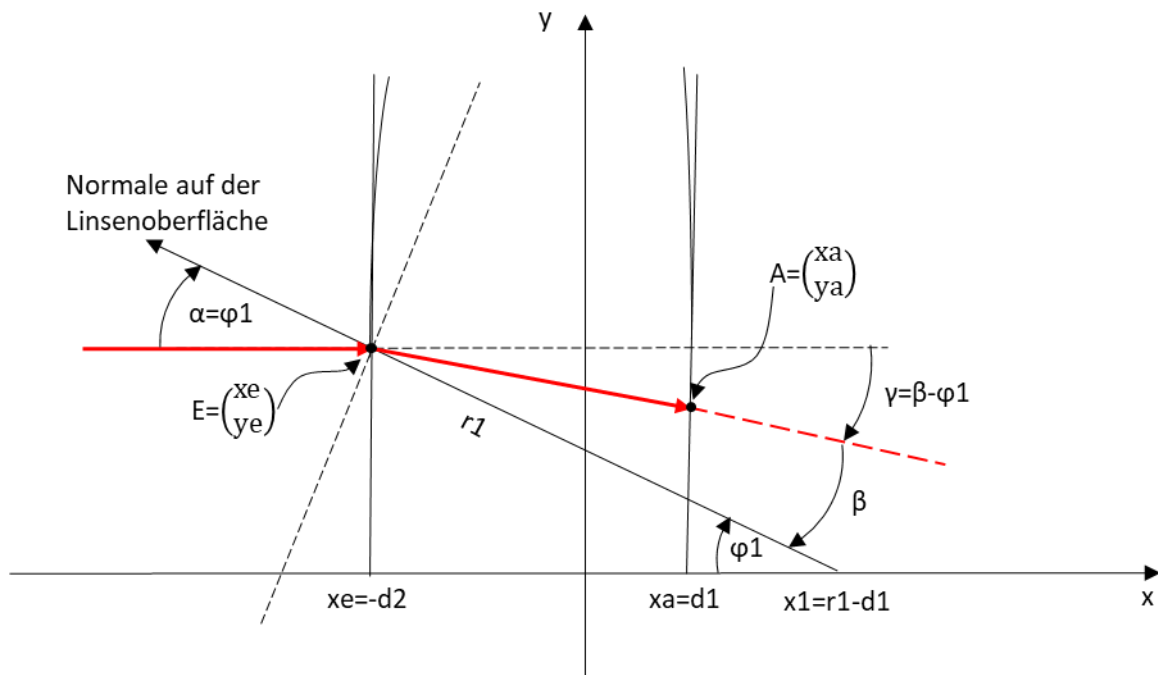


Abbildung 9: Ableitung der Linsenschleifer-Formel: eingangsseitige Brechung

Die Gleichung des Strahls lautet damit:

$$y(x) = y_e - \tan(\gamma) \cdot (x - x_e) = y_e - \gamma \cdot (x - x_e) = y_e - \gamma \cdot (x - (-d_2))$$

$$y_a = y(x = d_1) = y_e - \gamma \cdot (x + d_2) = y_e - \gamma \cdot d = y_e - \frac{(n - n_0)}{n} \cdot \alpha \cdot d = y_e - \frac{(n - n_0)}{n} \frac{y_e \cdot d}{r_1}$$

$y_a = y_e \cdot \left(1 - \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot r_1} \right)$	3
--	---

In der Höhe y_a verlässt der Strahl die Linse und wird erneut gebrochen – in diesem Fall an der Linse mit dem Krümmungsradius R_2 .

Die folgende Abbildung zeigt, dass der Strahl nun beim Austritt aus der Linse im Punkt A so gerichtet wird, dass sich sein Winkel bezüglich der Normalen entsprechend dem Verhältnis der Brechzahlen vergrößert.

Aus dem Winkel γ des inneren Strahls bezüglich der Horizontalen sowie dem Neigungswinkel φ_2 der Normalen im Punkt A bekommt man für den Winkel δ des inneren Strahls gegen die Normale:

$$\delta = \varphi_2 + \gamma$$

Der Ausgangsstrahl hat dann den Winkel ϵ bezüglich der Normalen:

$$\epsilon = \frac{n}{n_0} \cdot \delta = \frac{n}{n_0} \cdot (\varphi_2 + \gamma)$$

Und letztlich wird für den Winkel ϑ , den der zweifach gebrochene Strahl mit der optischen Achse bildet:

$$\vartheta = \epsilon - \varphi_2 = \frac{n}{n_0} \cdot (\varphi_2 + \gamma) - \varphi_2 = \frac{(n - n_0)}{n_0} \cdot \varphi_2 + \frac{n}{n_0} \cdot \gamma = \frac{(n - n_0)}{n_0} \cdot \frac{y_a}{r_2} + \frac{(n - n_0)}{n} \cdot \frac{y_e}{r_1} \cdot \frac{n}{n_0}$$

$$\vartheta = \frac{(n - n_0)}{n_0} \cdot \left(\frac{y_a}{r_2} + \frac{y_e}{r_1} \right) = \frac{(n - n_0)}{n_0} \cdot \left(\frac{y_e}{r_2} \cdot \left(1 - \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot r_1} \right) + \frac{y_e}{r_1} \right)$$

$$= \frac{(n - n_0) \cdot y_e}{n_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot r_1 \cdot r_2} \right)$$

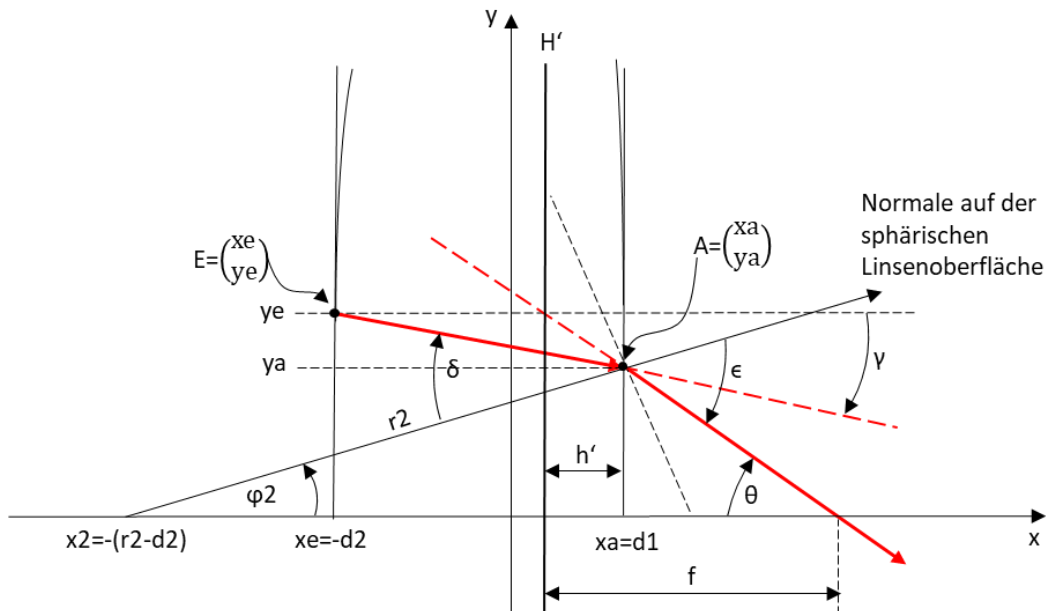


Abbildung 10: Ableitung der Linsenschleifer-Formel: ausgangsseitige Brechung

Um die Brennweite zu bekommen, muss man den gebrochenen Strahl in die Linse hinein verlängern und mit der Verlängerung des ursprünglichen Parallelstrahls schneiden. Durch diesen Schnittpunkt verläuft die Hauptebene H' , gegen die die Brennweite gemessen wird. Da dieser Schnittpunkt genau in der Höhe des Parallelstrahls y_e liegt, gilt folgende Gleichung:

$$\frac{y_e}{f} = \tan(\vartheta) = \vartheta$$

Damit folgt für die reziproke Brennweite einer bikonvexen Linse mit $r_1, r_2 > 0$:

$\frac{1}{f} = \frac{\vartheta}{y_e} = \frac{(n - n_0)}{n_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(n - n_0) \cdot d}{n \cdot r_1 \cdot r_2} \right)$	4
--	---

Gl (4) entspricht genau der Linsenschleiferformel, wenn man dort für das negative(!) R_2 den Wert $-r_2$ ($r_2 > 0$) einsetzt.

BEACHTE:

Die Gleichung konnte nur abgeleitet werden, weil man alle Winkel und alle Abstände von der optischen Achse als sehr klein angenommen hat. Dabei hat man mit einer konstant breiten Linse gerechnet, aber die Normalen jeweils aus den Radien bestimmt. (Anderenfalls hätte man es lediglich mit einer brechenden Scheibe zu tun gehabt, die überhaupt keine Brenneigenschaften hat)

Abbildung 10 erlaubt auch direkt die Angabe des Wertes h' , also des Abstandes der bildseitigen Hauptebene vom Linsenscheitel auf der Bildseite. Wegen der Ähnlichkeit der beteiligten Dreiecke liest man ab:

$$\frac{y_e - y_a}{h'} = \frac{y_e}{f}$$

Daraus folgt mit Gl (3):

$h' = f \cdot \frac{(y_e - y_a)}{y_e} = \frac{(n - n_0) \cdot d \cdot f}{n \cdot r_1}$	5
--	---

Wenn man nun noch die gegenstandsseitigen Brennweite und den Wert für h haben möchte, so muss man einfach r_1 und r_2 vertauschen. Die Brennweite ist dieselbe, da die Gl (4) symmetrisch bezüglich r_1 und r_2 ist.

Für den Abstand h der Hauptebene H vom Scheitel auf der Gegenstandsseite wird damit:

$h = \frac{(n - n_0) \cdot d \cdot f}{n \cdot r_2}$	6
---	---

1.2.3 Plankonvexe Linse als Sonderfall einer bikonvexen Linse

Wenn man in den Gleichungen (4) bis (6) den Übergang $r_2 \rightarrow \infty$ ausführt, so kommt man zu einer plankonvexen Linse, deren ebene Seite rechts liegt.

$$\frac{1}{f} = \frac{(n - n_0)}{n_0 \cdot r_1} \Rightarrow f = \frac{n_0 \cdot r_1}{(n - n_0)}; \quad h = 0; \quad h' = \frac{n_0}{n} \cdot d$$

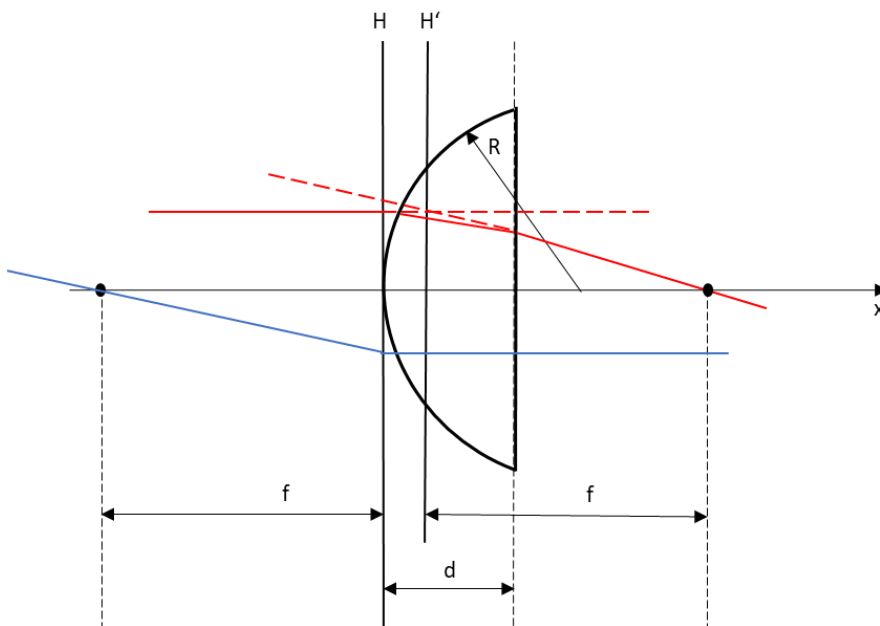


Abbildung 11: Lage der Hauptebenen einer plankonvexen Linse

1.3 Berechnung des exakten Strahlenganges einer bikonvexen Linse

Wie oben abgeleitet gilt die Linsenschleifer-Formel nur für kleine Winkel und achsennahe Strahlen. Sphärisch geschliffene Linsen haben für steilere bzw. weiter entfernte Strahlen eine erhebliche sphärische Aberration, also eine Abweichung der Brennweite von der Höhe des einlaufenden Parallelstrahls. Diese Aberration wollen wir hier durch Berechnung des exakten Strahlenganges einer sphärischen, bikonvexen Linse berechnen.

Wenn man eine bikonvexe Linse mit zwei unterschiedlichen Radien schleifen will, so setzt sich deren Dicke aus zwei Bestandteilen zusammen:

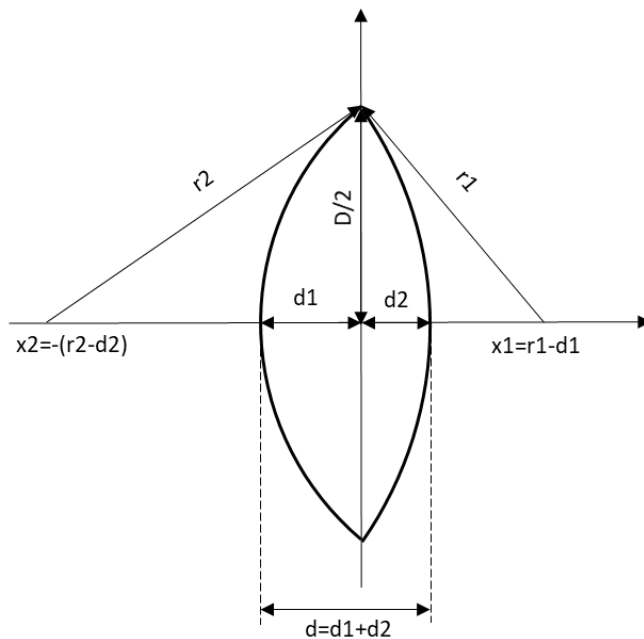


Abbildung 12: Dicke einer sphärischen, bikonvexen Linse mit unterschiedlichen Schleifradien

Beachte:

Die Teildicke d_1 liegt auf der linken Seite, die Teildicke d_2 auf der rechten.

Man liest ab:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = r_2^2 - (r_2 - d_2)^2 = r_1^2 - (r_1 - d_1)^2$$

Wenn man r_1 und r_2 sowie den Linsendurchmesser D vorgibt, so lassen sich d_1 und d_2 und damit d berechnen:

$d_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} \quad \text{und} \quad d_2 = r_2 - \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}$	7
--	---

Man kann ebenso r_1 , r_2 und d_1 vorgeben und daraus D und d_2 berechnen.

Die Linse bestehe aus zwei sphärischen Teilen, die in den Abbildungen als Kreisbögen erscheinen. (K1 mit r_1 und K2 mit r_2). Der linke Linsenteil ist daher stärker gewölbt als der rechte.

Wir legen die y-Achse genau in die Mitte zwischen den beiden Teilstrecken d_1 und d_2 . Dadurch liegen die Mittelpunkte der beiden Kreise um jeweils d_1 und d_2 verschoben:

$x_1 = r_1 - d_1 \quad \text{und} \quad x_2 = -r_2 + d_2 = -(r_2 - d_2)$	8
--	---

Wir gehen von einem Strahl aus, der die linke Linsenoberfläche im Punkt $E = (x_e, y_e)$ (E=Einfallsstrahl) unter dem Winkel α trifft. Die x-Koordinate x_e des Punktes E berechnet sich aus der Kreisgleichung K1:

$$y^2 = r_1^2 - (x - x_1)^2 \Rightarrow y_e^2 = r_1^2 - (x_e - x_1)^2$$

$x_e = x_1 - \sqrt{r_1^2 - y_e^2}$	9
------------------------------------	---

(Die zweite Lösung für x_e liegt weit außerhalb der Linse und fällt deshalb weg.)

Im Punkt E wird der Strahl an der Normalen auf der gewölbten Ebene gebrochen. Diese Normale hat gerade den Neigungswinkel des Berührungsradius r_1 zum Punkt E:

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{y_e}{r_1}\right)$$

Damit hat der Strahl, der im Punkt E unter dem Winkel α bezüglich der Horizontalen einläuft, bezüglich der Normalen den Winkel $\alpha + \varphi_1$. Für den Winkel β des gebrochenen Strahls gilt dann nach dem Brechungsgesetz:

$\beta = \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \cdot \sin(\alpha + \varphi_1)\right)$	10
--	----

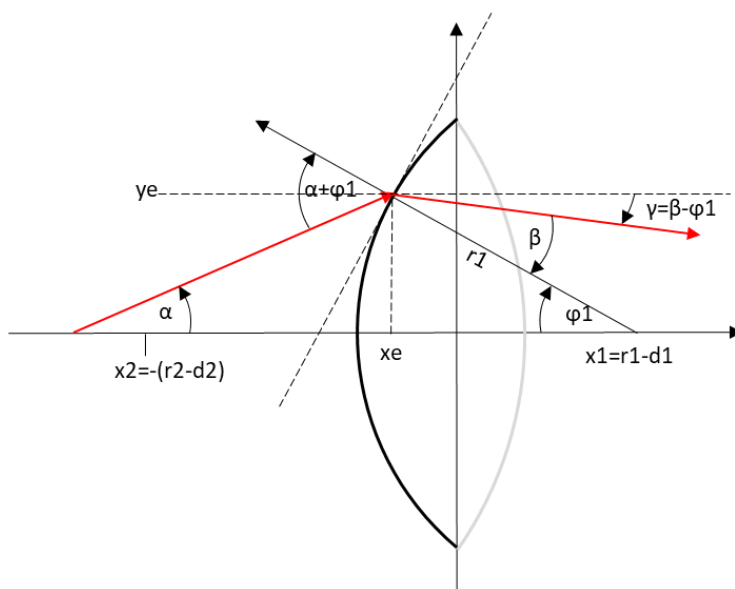


Abbildung 13: Brechung eines Eingangsstrahls an der Oberfläche einer bikonvexen Linse

Um den Strahl im x-y-System zu beschreiben benötigen wir seinen Anstiegswinkel bezüglich der Horizontalen:

$\gamma = \beta - \varphi_1 \quad k = \tan(\gamma)$	11
---	----

Damit lautet die Geradengleichung des gebrochenen Strahls im Inneren der Linse:

$y(x) = y_e + k \cdot (x - x_e)$	12
----------------------------------	----

Wir müssen jetzt den Austritts-Punkt A berechnen, in dem der Strahl die Linse verlässt und dabei erneut gebrochen wird. $A=(x_a, y_a)$ ergibt sich als Schnittpunkt der Geradengleichung mit der Kreisgleichung für K2, also

$$y_a^2 = (y_e + k \cdot (x_a - x_e))^2 = r_2^2 - (x_a - x_2)^2$$

Ausmultiplizieren und sortieren der letzten Gleichung nach Potenzen von x_a ergibt eine quadratische Gleichung für x_a in der üblichen Form:

$$x_a^2 + p \cdot x_a + q = 0$$

Mit den Koeffizienten p und q:

$p = \frac{2 \cdot (k \cdot y_e - k^2 \cdot x_e - x_2)}{(1 + k^2)} \quad q = \frac{(y_e^2 - 2 \cdot k \cdot y_e \cdot x_e + k^2 \cdot x_e^2 - r_2^2 + x_2^2)}{(1 + k^2)}$	13
---	----

Damit haben wir die Koordinaten des Austritts-Punktes A berechnet:

$$x_a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad y_a = x_e + k \cdot (x_a - x_e)$$

Wir verwenden hier nur die Lösung für x_a mit dem positiven Vorzeichen, weil die andere Lösung für x_a weit links von der Linse auf dem Kreis K2 liegt.

Um die Brechung des ausgehenden Strahls zu berechnen, benötigen wir wieder die Normale, die gerade den Anstiegswinkel φ_2 hat:

$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{y_a}{r_2}\right)$	14
---	----

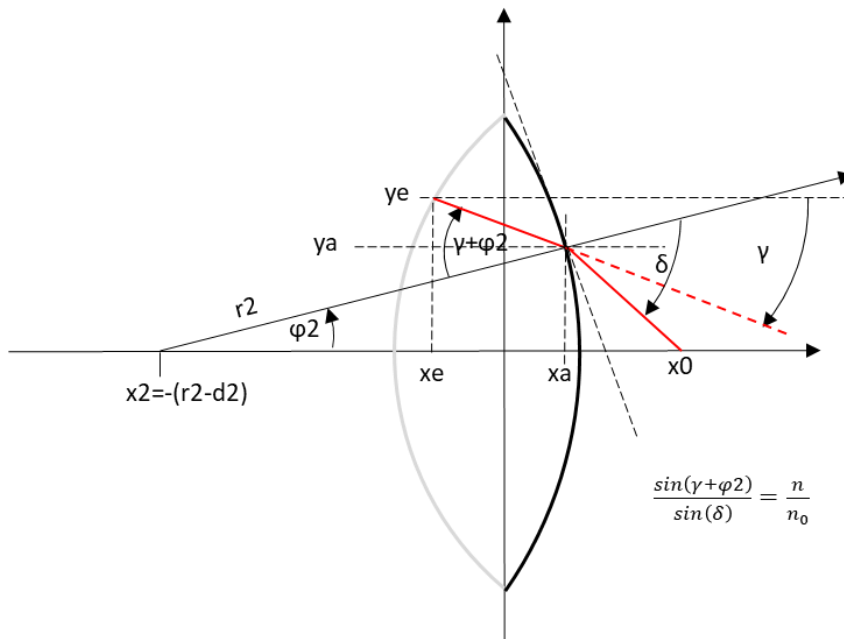


Abbildung 14: Berechnung des Ausgangsstrahls einer bikonvexen Linse

Der Neigungswinkel des Strahls gegen diese Normale ist dann $\varphi_2 - \gamma$ und für den Winkel δ des gebrochenen Ausgangsstrahls gilt:

$\sin(\delta) = \frac{n}{n_0} \cdot \sin(\varphi_2 - \gamma) \quad \Rightarrow \quad \delta = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \cdot \sin(\varphi_2 - \gamma)\right)$	15
---	----

Wegen $n > n_0$ kann es hierbei zu Problemen kommen, wenn das Argument des $\arcsin()$ größer als 1 wird. Physikalisch bedeutet das den Fall der Totalreflexion des Strahls im Inneren der Linse beim Austritt. (Im folgenden Computerprogramm kann man das für Eingangsstrahlen, die von schräg oben einfallen, überprüfen.)

Um letztlich die Geradengleichung des Austrittsstrahls zu bekommen, berechnen wir wieder den Winkel bezüglich der Horizontalen.

$\theta = \delta - \varphi_2$	16
-------------------------------	----

Also lautet die Geradengleichung des zweifach gebrochenen Strahls hinter der Linse:

$$y(x) = y_a + \tan(\theta) \cdot (x - x_a)$$

Dieser Strahl schneidet die optische Achse bei x_0 :

$x_0 = x_a - \frac{y_a}{\tan(\theta)}$	17
--	----

Eine vollständig analytische Lösung für die Brennweite f bei einem Parallelstrahl in der Höhe y_e ist nicht möglich. Wir codieren die Gleichungen (7) bis (17) daher in einem Computerprogramm (Sprache R) und stellen den Strahlenverlauf grafisch dar.

```
draw_ray=function(ye, alphae_grad, lwd=1, color="red"){
  # ye: Auftreffhöhe
  # alphae: Auftreffwinkel in Grad!
  alphae=bogen(alphae_grad)

  # Bei welchem x-Wert xe trifft der Strahl auf K1
  xe=x1-sqrt(r1^2-ye^2)

  # alpha= Einfallswinkel gegen Lot im Auftreffpunkt(xe,ye)
  phil=asin(ye/r1)
  alpha=phil+alphae

  # Winkel des gebrochenen Strahls ebenfalls gegen Lot in(xe, ye)
  beta=asin(n0/n*sin(alpha))

  # Winkel des gebrochenen Strahls gegen Horizontale
  gamma = beta-phil

  # Schnittpunkt des gebrochenen Strahls mit der Linsenrückseite K2
  # Gleichsetzen Kreisgleichung K2 mit Geradengleichung
  # y^2=r^2-(x-x2)^2 und y=ya-k*(x-xa)
  k=tan(gamma)
  p=2*(k*ye-xe*k^2-x2)/(k^2+1)
  q=(ye^2-2*k*ye*xe+k^2*xe^2-r2^2+x2^2)/(k^2+1)

  # Schnittpunkt A gebrochener Strahl mit K2
  xa=-p/2+sqrt(p^2/4-q)
  ya=ye+k*(xa-xe)

  # Winkel von A aus Sicht von x2
  phi2=asin(ya/r2)

  # Winkel gegen das Lot im Punkt A VORSICHT! Totalreflexion möglich
  delta=asin(n/n0*sin(phi2-gamma))

  # Winkel des Ausgangsstrahls gegen Horizontale
  theta=delta-phi2

  # Gleichung des Ausgangsstrahls: y(x)=ya-tan(delta)*(x-xa)
  # Durchstoßpunkt x0 durch optische Achse
  x0=ya/tan(theta)+xa

  #Kreis K1 zeichnen
  alpha1=pi-a1
  alpha2=pi+a1
  draw_arc(x1,0, r1, alpha1, alpha2, 2, 1, "black")

  #Kreis K2 zeichnen
  alpha2=acos(abs(x2)/r2)
  alpha1=-alpha2
  draw_arc(x2,0, r2, alpha1, alpha2, 2, 1, "black")

  # Strahl aus Punktfolge zeichnen
  lines(c(xe-30,xe,xa,x0),c(ye-30*tan(alphae),ye,ya,0),
        lwd=lwd, lty=1, col=color)

  return(x0)
}
```

Man erkennt zweierlei:

- Die mit der Linsenschleifer-Formel berechnete Brennweite wird nur für Strahlen sehr nahe der optischen Achse- und damit auch nur mit sehr kleinen Winkeln – erreicht. In der

Abbildung ist das der untere Parallelstrahl, der im Abstand von 1 mm von der optischen Achse einläuft.

Auch Strahlen, die noch näher an der optischen Achse liegen, liefern dieselbe Brennweite, die auch die Linsenschleiferformel liefert.

- Die tatsächliche Brennweite nimmt mit zunehmender Einlaufhöhe y_e des Parallelstrahls immer mehr ab. Der Parallelstrahl, der bei 30 mm einläuft, hat nur noch eine Brennweite von 85 mm.

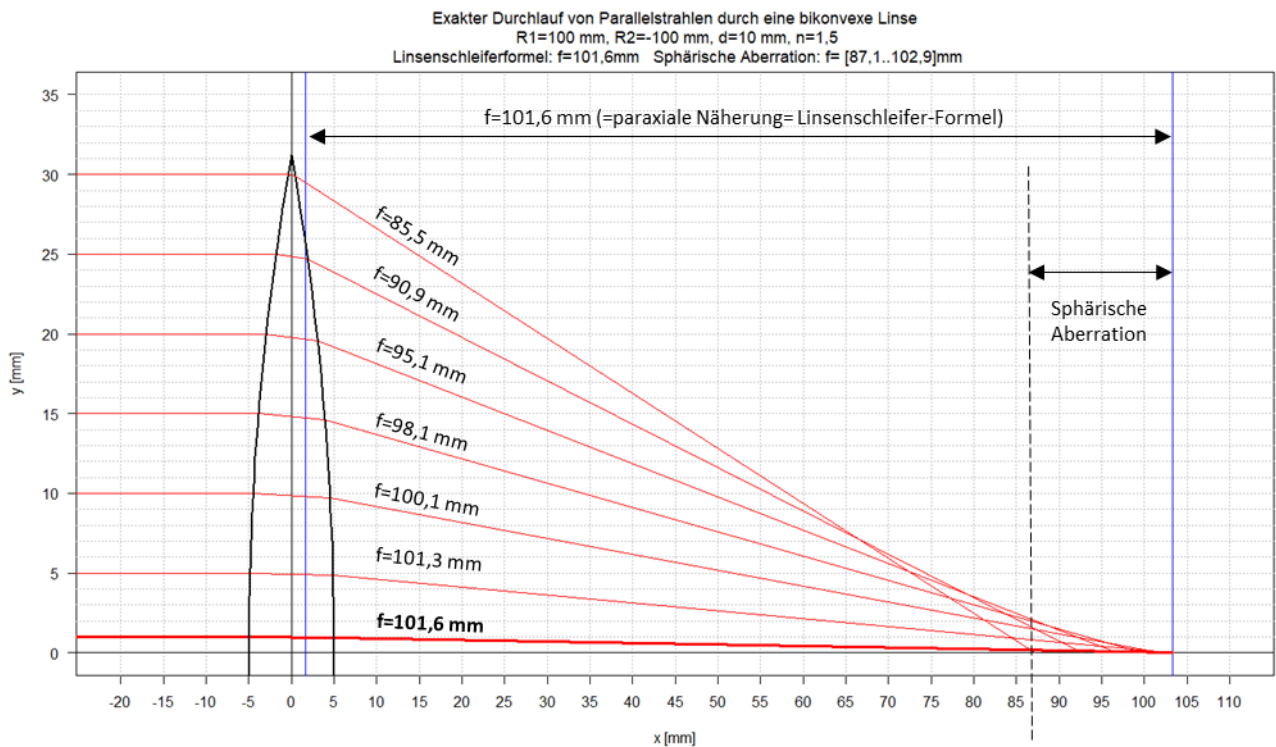


Abbildung 15: Exakter Strahlengang durch eine symmetrische, bikonvexe, sphärische Linse mit Aberration

BEACHTEN:

Wegen der unterschiedlichen Skalierung der Achsen sind die Winkel nicht maßstabsgerecht.

Es gibt unterschiedliche Methoden zur Verringerung der sphärischen Aberration. Eine Möglichkeit besteht in der Verwendung nichtsphärischer Linsen, deren Krümmung nicht mehr konstant ist.

1.4 Abbildungsgleichung für Konkav- und Konvexlinsen

1.4.1 Abbildungsgleichung für dünne Linsen

Die Abbildungsgleichung stellt unter idealen Annahmen der Symmetrie einen einfachen Zusammenhang zwischen Brennweite f , Gegenstandsweite a und Bildweite b für dünne Linsen her. Sie gilt gleichermaßen für Konkav- und Konvexlinsen.

Unter folgenden Annahmen lässt sich die Abbildungsgleichung für dünne Linsen einfach über die Ähnlichkeit der beteiligten Dreiecke in Abbildung 16 ableiten:

- Der Gegenstand der Höhe G befindet sich links von der Linse im Abstand g von der senkrechten Linsenachse.
- Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie durch den Brennpunkt verlaufen. Dieser liegt im Abstand f (=Brennweite) von der senkrechten Linsenachse entfernt.
- Mittelpunktstrahlen werden gar nicht gebrochen.
- Parallel- und Mittelpunktstrahl bilden zusammen das scharfe Bild der Höhe B im Abstand b von der senkrechten Linsenachse.

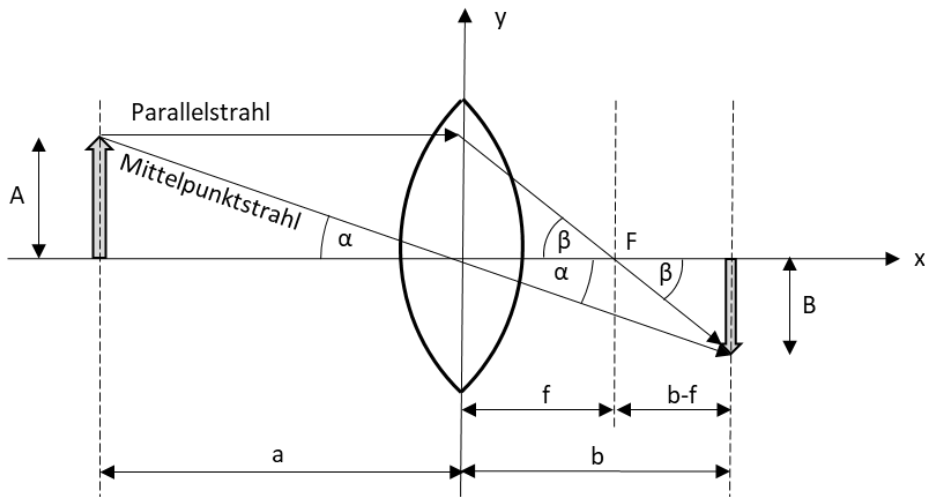


Abbildung 16: Ableitung der Linsengleichung

Ähnliche Dreiecke mit dem Winkel α : $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} \Rightarrow A = \frac{a \cdot B}{b}$

Ähnliche Dreiecke mit dem Winkel β : $\frac{A}{f} = \frac{B}{b-f} \Rightarrow \frac{a \cdot B}{b} \cdot (b-f) = B \cdot f \Rightarrow a - \frac{a \cdot f}{b} = f$

Oder nach Division durch $a \cdot f$:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	18
---	----

1.4.2 Abbildungsgleichung für dicke Linsen

Mit Hilfe der Hauptebenen lässt sich die Abbildungsgleichung für dicke Linsen (oder auch Linsensysteme) ableiten. Dabei beziehen sich die Brennweiten sowie die objekt- und bildseitigen Abstände jeweils auf die betreffende Hauptebene.

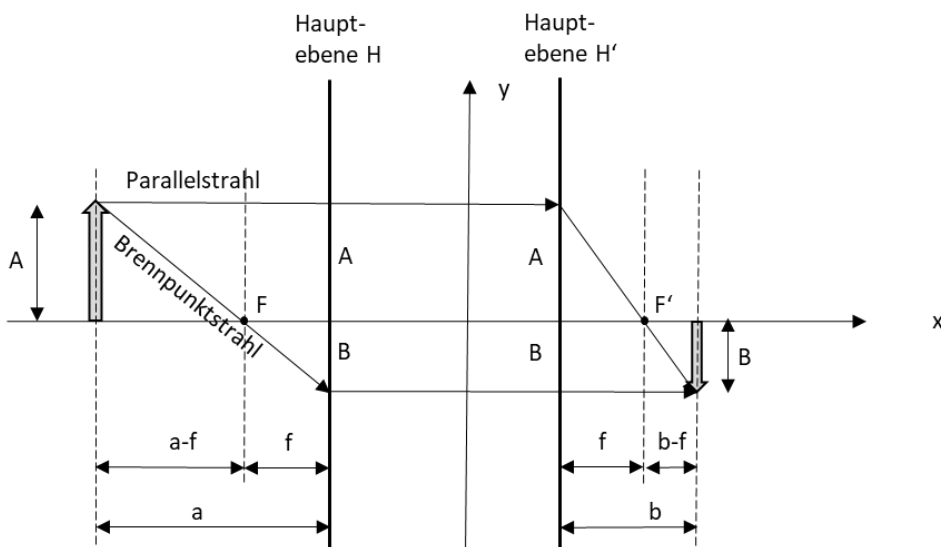


Abbildung 17: Abbildungsgleichung für eine dicke Linse über Hauptebenen

Man betrachtet einen Parallelstrahl, dem vom Kopfpunkt des Objektes ungebrochen durch die Hauptebene H hindurchgeht und an H' so gebrochen wird, dass er durch den bildseitigen Brennpunkt F' verläuft, der von H' den Abstand f hat.

Aus der Ähnlichkeit der bildseitigen Dreieck folgt:

$$\frac{A}{f} = \frac{B}{b-f} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{f}{b-f}$$

Ein Strahl vom Kopf des Objektes, der durch den objektseitigen Brennpunkt F verläuft, der von der Hauptebene H den Abstand f hat, passiert die Hauptebene H' parallel zur optischen Achse. Beide Strahlen schneiden sich im Abbildungspunkt des Objekt-Kopfpunktes.

Auf der Objektseite liest man ab:

$$\frac{A}{a-f} = \frac{B}{f} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a-f}{f}$$

Gleichsetzen der beiden letzten Beziehungen für den Quotienten A/B ergibt:

$$\frac{f}{b-f} = \frac{a-f}{f} \Rightarrow f^2 = (a-f) \cdot (b-f) = a \cdot b - f \cdot (a+b) + f^2$$

$$a \cdot b = f \cdot (a+b) \Rightarrow f = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Die letzte Gleichung ist wieder die Abbildungsgleichung, aber in diesem Fall mit den Abmessungen bezogen auf die Hauptebenen.

1.5 Experimentelle Bestimmung von Linsenparametern

1.5.1 BESSEL-Formel zur Bestimmung der Brennweite dünner Linsen

Die Brennweite dünner Linsen hängt nach Gl (18) unmittelbar mit den Bild- und Objektweiten zusammen.

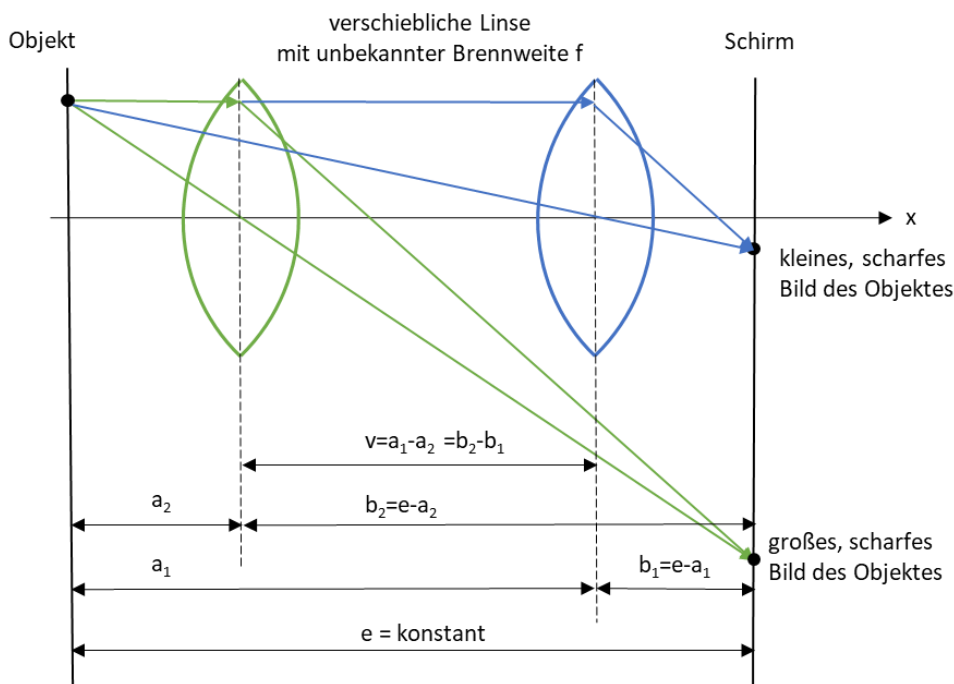


Abbildung 18: Ableitung der BESSEL-Formel zur Bestimmung der Brennweite einer dünnen Linse

Um die Brennweite einer dünnen Linse zu bestimmen, ordnet man sie auf einer Schiene verschieblich zwischen einem Objekt und einem Schirm an, die zueinander im festen Abstand e stehen.

Dann verschiebt man die Linse solange, bis auf dem Schirm ein scharfes Bild des Objektes entsteht. Durch einen auf der Schiene angebrachten Maßstab kann man die Linsenposition sowie die Positionen von Objekt und Schirm genau messen.

Aus der Abbildungsgleichung bekommt man mit $b=e-a$:

$$f = \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{a \cdot (e - a)}{a + (e - a)} = \frac{a \cdot e - a^2}{e} \Rightarrow a^2 - e \cdot a + e \cdot f = 0$$

Die letzte quadratische Gleichung für a hat zwei Lösungen. Es gibt also zwei Möglichkeiten zur Scharfstellung des Bildes auf dem Schirm (Bedingung: $e > 4f$) – s. Abbildung 18.

$$a_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} - e \cdot f}; \quad e > 4 \cdot f$$

Beide Werte lassen sich gut messen. Bildet man ihre Differenz v , die damit ebenfalls bekannt ist, so bekommt man:

$$a_1 - a_2 = v = 2 \cdot \sqrt{\frac{e^2}{4} - e \cdot f}$$

Damit kann man aus den gut messbaren Größen e (=Abstand Objekt-Schirm) und v (=Abstand der beiden Scharfstellungen) die Brennweite der dünnen Linse berechnen:

$f = \frac{e^2 - v^2}{4 \cdot e}$	19
-----------------------------------	----

Um die Lage der Hauptebenen muss man sie bei dünnen Linsen nicht kümmern, die Hauptebenen fallen zusammen und liegen in der Linsenachse.

1.5.2 ABBE-Verfahren zur Bestimmung der Hauptebenen und der Brennweite

Bei dicken Linsen beziehen sich die Objekt- und die Bildweite in der Abbildungsgleichung auf die (unbekannten) Hauptebenen. Man kann diese Weiten also nicht unmittelbar messen, da der Bezugspunkt fehlt.

Gegeben ist ein optisches System (dicke Linse, Linsensystem), für das die Brennweite und die Lage der Hauptebenen experimentell zu bestimmen sind.

Man geht genauso vor, wie beim Verfahren nach BESSEL, installiert das verschiebliche System zwischen einem festen Objekt und einem festen Schirm. Man wird also auch hier wieder zwei Scharfstellungen erreichen, die erste indizieren wir wieder mit 1, die zweite mit 2.

Verschiebliches optisches System
mit fest darauf angebrachter
Markierung M

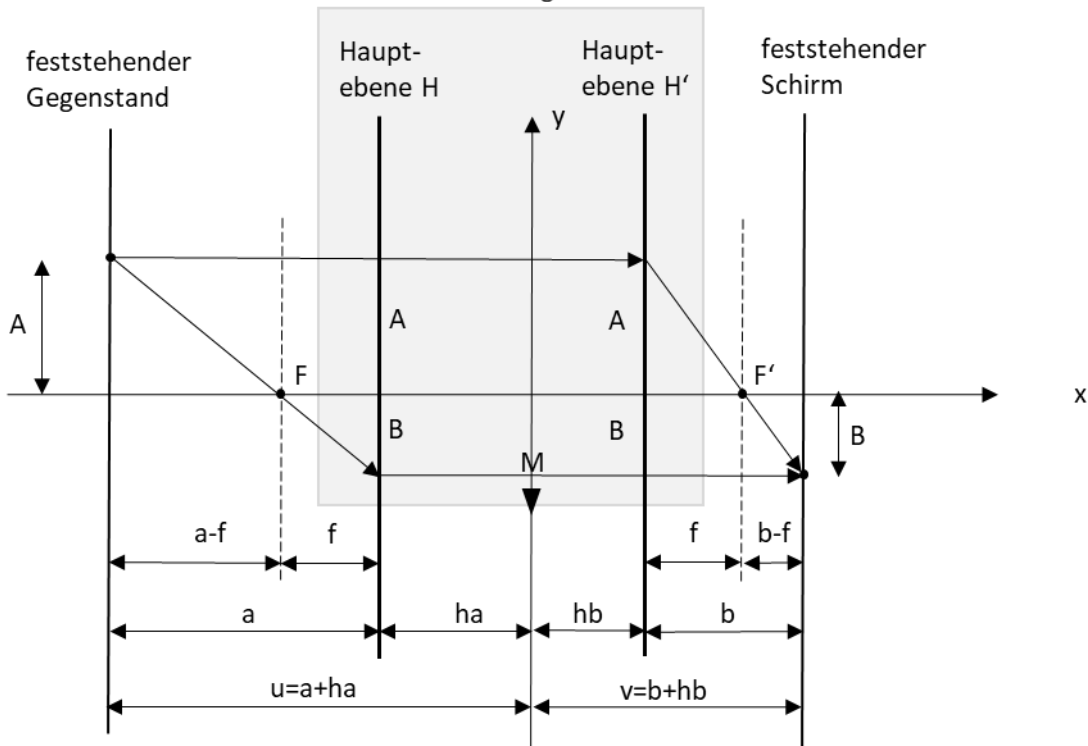


Abbildung 19: Ableitung des ABBE-Verfahrens

Die Abbildung 19 definiert die Bezeichnungen:

Variable	Bedeutung	Indizierte Werte	direkt messbar?
A	Objekthöhe		X
B	Bildhöhe	B_1, B_2 $B_1 < B_2$	X
β	Vergrößerung $\beta=B/A$	β_1, β_2 $\beta_1 < \beta_2$	
a	Objektweite gegen Hauptebene H	a_1, a_2 $a_1 > a_2$	-
b	Bildweite gegen Hauptebene H'	b_1, b_2 $b_1 < b_2$	-
ha	Abstand Hauptebene H von der Markierung M		-
hb	Abstand Hauptebene H' von der Markierung M		-
u	Objektweite gegen Markierung M	u_1, u_2 $u_1 > u_2$	X
v	Bildweite gegen Markierung M	v_1, v_2 $v_1 < v_2$	X

Da bei der Verschiebung des Systems sowohl die Hauptebenen als auch die fest auf dem System angebrachte Markierung M mitverschoben werden, ändern die Abstände ha und hb zwischen den Hauptebenen und der Markierung nicht.

Wir leiten die Beziehungen einmal ab und indizieren sie danach mit 1 und 2.

Formel allgemein	Formel für Position 1 (nahe am Schirm)	Formel für Position 2 (nahe am Objekt)
$\beta = \frac{B}{A}$	$\beta_1 = \frac{B_1}{A}$	$\beta_2 = \frac{B_2}{A}$
$\frac{A}{B} = \frac{1}{\beta} = \frac{a-f}{f} = \frac{a}{f} - 1$ $\Rightarrow a = f \cdot \left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$	$a_1 = f \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} + 1\right)$	$a_2 = f \cdot \left(\frac{1}{\beta_2} + 1\right)$
$\frac{B}{A} = \beta = \frac{b-f}{f} = \frac{b}{f} - 1$ $\Rightarrow b = f \cdot (\beta + 1)$	$b_1 = f \cdot (\beta_1 + 1)$	$b_2 = f \cdot (\beta_2 + 1)$
$u = a + ha$	$u_1 = a_1 + ha$	$u_2 = a_2 + hb$
$v = b + hb$	$v_1 = b_1 + hb$	$v_2 = b_2 + hb$

Aus der Differenz der Messwerte u_1 und u_2 lässt sich f berechnen:

$$u_1 - u_2 = a_1 - a_2 = f \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} + 1\right) - f \cdot \left(\frac{1}{\beta_2} + 1\right) = f \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)$$

$f = \frac{u_1 - u_2}{\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)} > 0$	20
--	----

Und für die Abstände der Hauptachsen von der gewählten Markierung wird:

$$ha = u_1 - a_1 = u_1 - f \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} + 1\right) = u_1 - \frac{(u_1 - u_2)}{\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} + 1\right) = u_1 - \frac{(u_1 - u_2) \cdot (1 + \beta_1)}{\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)}$$

$$hb = u_2 - a_2 = u_2 - f \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} + 1\right) = u_2 - \frac{(u_1 - u_2)}{\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} + 1\right) = u_2 - \frac{(u_1 - u_2) \cdot (1 + \beta_1)}{\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)}$$

2 Linsensysteme aus zwei dünnen Linsen

2.1 Systeme dünner Linsen - Ersatzlinse

2.1.1 Ableitung der Gleichung für die Systembrennweite

Wir leiten die Gleichung für zwei dünne Linsen, die sich im Abstand d zueinander befinden, her, wobei die erste Linse eine Konkavlinse und die zweite eine Konvexlinse ist. Die Ergebnisse gelten aber auch für andere Linsenkombinationen, z.B. für zwei Konvexlinsen.

Zur Vereinfachung der folgenden Ausdrücke legen wir die y -Achse auf die Ebene H2.

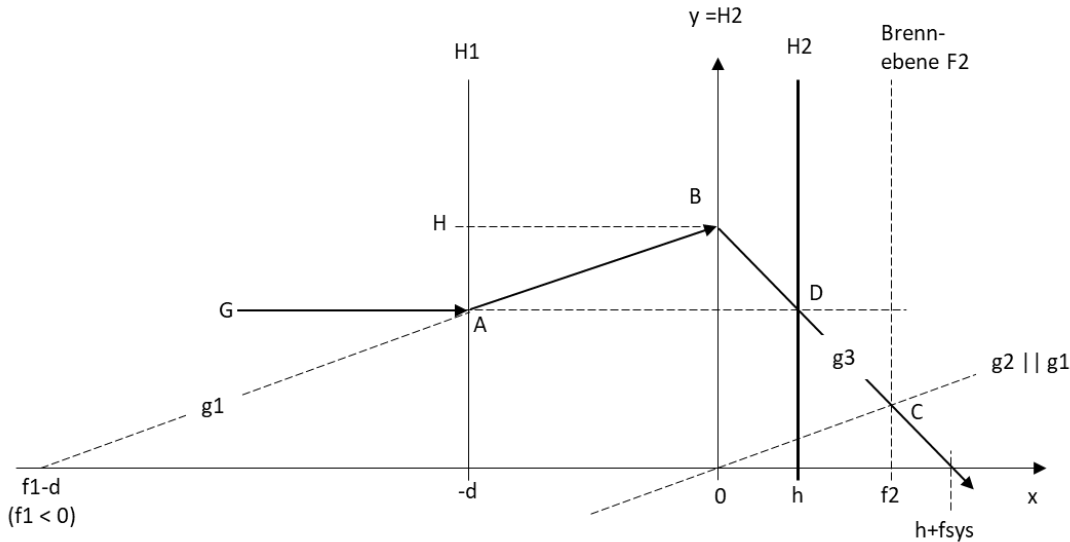


Abbildung 20: Herleitung der Gleichung für die Systembrennweite

Die Gerade g_1 beschreibt den in der Konkavlinse gebrochenen Strahl $A \rightarrow B$:

$$\text{Gerade } g_1: y_1 = m_1 \cdot (x - (f_1 - d)); \quad m_1 = \frac{G}{-d - (f_1 - d)} = -\frac{G}{f_1}$$

Bei $x=0$ schneidet diese Gerade die Ebene H2, trifft also auf die Konvexlinse.

$$y_1(x=0) = y_B = \frac{G \cdot (f_1 - d)}{f_1}$$

Die Gerade g_2 ist der zu g_1 parallele Mittelpunktstrahl. Sie hat denselben Anstieg wie g_1 .

$$\text{Gerade } g_2: y_2 = m_1 \cdot x = -\frac{G}{f_1} \cdot x$$

Bei $x=f_2$ schneidet der MP-Strahl die Brennebene F2:

$$y_2(f_2) = y_C = -\frac{G}{f_1} \cdot f_2$$

Die Gerade g_3 beschreibt den Ausgangsstrahl der Konvexlinse, der von B über C verläuft und den Anstieg m_3 hat.

$$\text{Gerade } g_3: y_3 = y_B + m_3 \cdot x = \frac{G \cdot (f_1 - d)}{f_1} - \frac{G}{f_1} \cdot x$$

Speziell an der Stelle $x=f_2$ gilt:

$$y_3(f_2) = y_B + m_3 \cdot f_2 = y_C = -\frac{G}{f_1} \cdot f_2$$

Daraus folgt für den Anstieg von g3:

$$m_3 = \frac{y_C - y_B}{f_2} = \frac{-\frac{G}{f_1} \cdot f_2 - \frac{G \cdot (f_1 - d)}{f_1}}{f_2} = G \cdot \left(-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \right)$$

Damit ist die Gerade g3 vollständig aus den Parametern f_1 , f_2 und d bestimmt. (G wird sich herauskürzen).

Nun kann man mit dieser Geradengleichung die Werte für h und f_{sys} bestimmen:

$$y_3(h) = G = y_B + m_3 \cdot h \Rightarrow h = \frac{G - y_B}{m_3}; \quad y_3(h + f_{sys}) = 0 = y_B + m_3 \cdot (h + f_{sys})$$

Also:

$$f_{sys} = -\frac{y_B + m_3 \cdot h}{m_3} = -\frac{G}{m_3} = \frac{-G}{G \cdot \left(-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \right)}$$

Nach Kehrwertbildung und Kürzen bekommt man die bekannte Formel für die Systembrennweite:

$$\frac{1}{f_{sys}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad 21$$

Diese Gleichung gilt für positive und negative Werte von f_1 und f_2 gleichermaßen.

2.1.2 Bildseitige Hauptebene H'

Die Lage der bildseitigen Hauptebene wird bezüglich der Ebene H2 der Konvexlinse berechnet. Die Berechnung erfolgt mit einem „normalen“ Parallelstrahl von links nach rechts und ist daher einfacher als die Berechnung der gegenstandsseitigen Hauptebene.

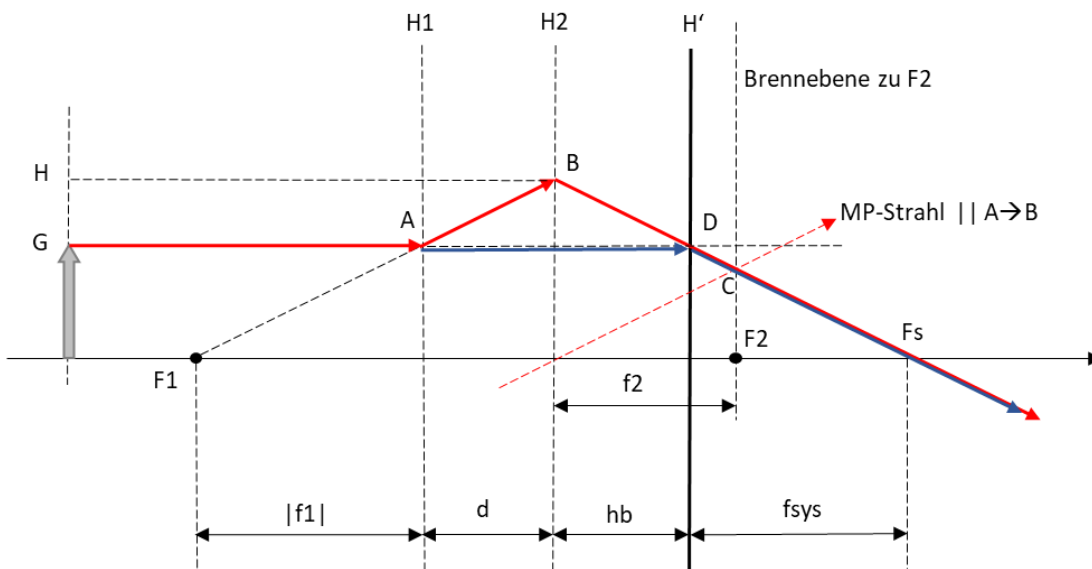


Abbildung 21: Berechnung der bildseitigen Hauptebene

Abbildung 21 zeigt den Strahlenverlauf für einen Parallelstrahl auf der Gegenstandsseite. Die dünnen Linsen werden abkürzend durch ihre mittigen Hauptebenen dargestellt: Konkavlinse = H1; Konvexlinse = H2.

- Der vom Gegenstand in der Höhe G ausgehende achsenparallele Strahl trifft H1 im Punkt A. Er wird wegen der negativen Brennweite f_1 nach oben in Verlängerung von $F_1 \rightarrow A$ abgelenkt.
- Der abgelenkte Strahl trifft im Punkt B auf H2 und wird dort nach rechts gebrochen. Um die Richtung dieses Strahls zu ermitteln, betrachten wir einen Mittelpunktstrahl durch H2, der parallel zu $A \rightarrow B$ ist. Diese beiden parallelen Strahlen müssen sich in einem Punkt auf der Brennebene (Senkrechte durch F_2) treffen. Diesen Schnittpunkt des MP-Strahls mit der Brennebene durch F_2 nennen wir C.
- $B \rightarrow C$ ist damit der Strahlenverlauf nach der Brechung an der Sammellinse H2. Dieser Strahl verläuft nicht durch den Brennpunkt F_2 , da er kein Parallelstrahl ist.
- Wenn man das Linsensystem H1-H2 bildseitig durch H' ersetzen will, so muss man den achsenparallelen Strahl über A hinaus verlängern (blau), bis er den Ausgangsstrahl $B \rightarrow C$ von H2 schneidet. In diesem Schnittpunkt D steht H' .
- Die Brechung des verlängerten, achsenparallelen Strahls durch H' muss so groß sein, dass der blaue Strahl gerade dem roten folgt. Da der blaue Strahl bezüglich H' ein Parallelstrahl ist, muss er nach Brechung an der Ersatzlinse durch den Brennpunkt zu H' verlaufen, der vereinbarungsgemäß gerade f_{sys} von H' entfernt ist.

Man liest auf der linken Seite von H2 an ähnlichen Dreiecken ab:

$$\frac{H - G}{d} = \frac{G}{|f_1|} \Rightarrow \frac{H - G}{G} = \frac{d}{|f_1|}$$

Und entsprechend rechts von H2:

$$\frac{H - G}{hb} = \frac{G}{f_{sys}} \Rightarrow \frac{H - G}{G} = \frac{hb}{f_{sys}}$$

Gleichsetzen der beiden letzten Gleichungen ergibt die Formel für den Abstand hb der Ebene H' von der Ebene H2:

$$hb(d) = f_{sys} \cdot \frac{d}{|f_1|} > 0 \quad 22$$

2.1.3 Gegenstandsseitige Hauptebene H

Die Lage der gegenstandsseitigen Hauptebene wird bezüglich der Ebene H1 der Konkavlinse berechnet. Die Berechnung erfolgt mit einem von der Bildseite kommenden Parallelstrahl.

Abbildung 21 zeigt den Strahlenverlauf für einen Parallelstrahl, der auf der Bildseite beginnt. Die dünnen Linsen werden abkürzend durch ihre mittigen Hauptebenen dargestellt: Konkavlinse = H1; Konvexlinse = H2.

- Der vom Gegenstand in der Höhe G ausgehende achsenparallele Strahl trifft H2 im Punkt A. Er wird wegen der positiven Brennweite f_2 durch den Brennpunkt F_2 abgelenkt.
- Der abgelenkte Strahl trifft im Punkt B auf H1 und wird dort nach unten gebrochen. Um die Richtung dieses Strahls zu ermitteln, betrachten wir einen Mittelpunktstrahl durch H1, der parallel zu $A \rightarrow B$ ist. Wir suchen den Schnittpunkt dieses Mittelpunktstrahls mit der Brennebene durch F_1 und nennen ihn C.

- Die Verlängerung des Strecke B -C über B hinaus ist damit der Strahlenverlauf nach der Brechung an der Konkavlinse H1.
- Wenn man das Linsensystem H1-H2 gegenstandsseitig durch H ersetzen will, so muss man den achsenparallelen Eingangsstrahl über A hinaus verlängern (blau), bis er den Strahl B → C von H1 schneidet. In diesem Schnittpunkt D steht H.
- Die Brechung des verlängerten, achsenparallelen Strahls durch H muss so groß sein, dass der blaue Strahl gerade dem roten folgt. Da der blaue Strahl bezüglich H ein Parallelstrahl ist, muss er nach Brechung an der Ersatzlinse durch den Brennpunkt zu H verlaufen, der vereinbarungsgemäß gerade f_{sys} von H entfernt ist.

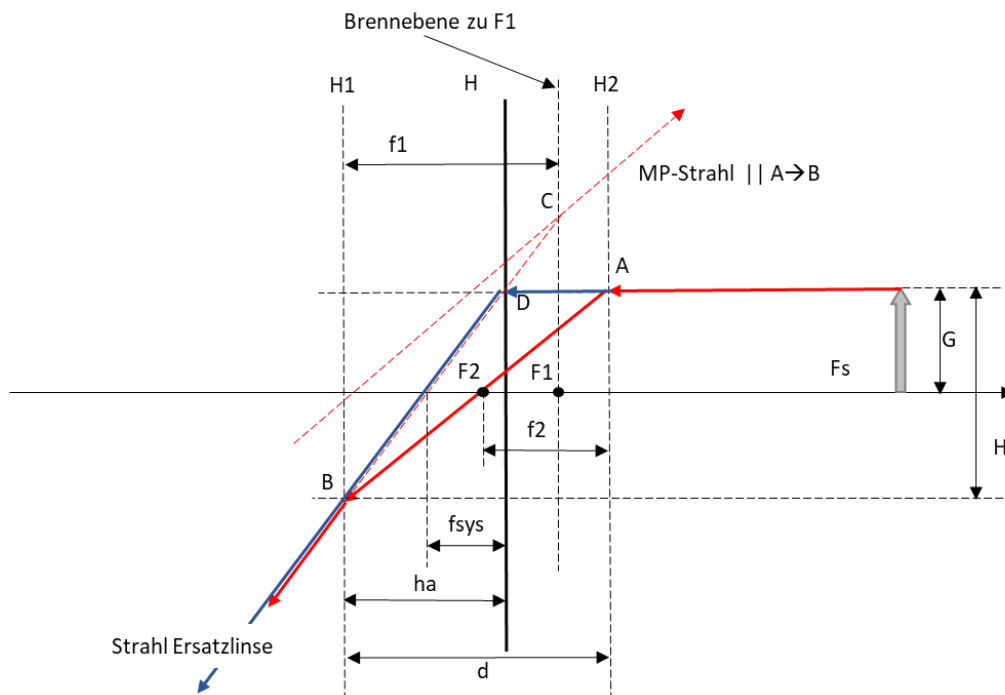


Abbildung 22: Berechnung der bildseitigen Hauptebene

Man liest an ähnlichen Dreiecken ab:

$$\frac{H}{d} = \frac{G}{f_2} \Rightarrow \frac{H}{G} = \frac{d}{f_2}$$

Und entsprechend:

$$\frac{H}{ha} = \frac{G}{f_{sys}} \Rightarrow \frac{H}{G} = \frac{ha}{f_{sys}}$$

Gleichsetzen der beiden letzten Gleichungen ergibt die Formel für den Abstand ha der Ebene H von der Ebene H1:

$$ha(d) = f_{sys} \cdot \frac{d}{f_2} > hb(d) > 0 \quad 23$$

Auf die so berechneten Hauptebenen bezieht sich die Systembrennweite $f_{\text{sys}}(d)$. Zwischen den Hauptebenen verlaufen alle Strahlen achsenparallel. Für $d=0$ fallen H mit H1 und H' mit H2 zusammen.

Die unterschiedlichen Abstände der Hauptebenen H und H' von den Hauptebenen der Linsen H1 und H2 erlauben es, gegenstandsseitig und bildseitig mit derselben Systembrennweite f_{sys} zu rechnen.

Vielleicht scheint es verwunderlich, dass der Abstand h_a auf der Gegenstandsseite gerade von f_2 und umgekehrt der bildseitige Abstand h_b von f_1 abhängt. Man beachte dabei aber, dass f_{sys} eben dem Produkt der beiden Brennweiten proportional ist, wodurch sich die im Nenner stehende „unpassende“ Brennweite gerade herauskürzt. In der Folge ist $h_a \sim f_1 \cdot d$ und $h_b \sim f_2 \cdot d$.

3 Strahlenberechnung mit Matrizen

3.1 Vektoren und Matrizen in der Strahlenoptik

In Linsensystemen werden die unterschiedlichen Linsen hintereinander auf der optischen Achse (=x-Achse von links nach rechts) angeordnet. Auf dem Weg eines Strahls durch ein Linsensystem gibt es Brechvorgänge, bei denen der Strahl seinen Winkel zur optischen Achse ändert. Zwischen den einzelnen Linsen breitet sich der Strahl geradlinig aus, ohne seinen Winkel bezüglich der optischen Achse zu ändern.

Für beide Vorgänge (Brechung und Translation) werden Matrizen eingeführt. Der Weg eines Strahls wird dann als Folge von Brechungs- und Translationsmatrizen beschrieben. Die sog. Transfermatrix eines Linsensystems ist das Matrixprodukt der beteiligten Brechungs- und Translationsmatrizen.

Die optischen Strahlen werden als vektorielle Eingangs- und Ausgangssignale dieser Transfermatrix aufgefasst. Bei diesen Vektoren handelt es sich *nicht* um normale Ortsvektoren, die nur x und y-Koordinaten enthalten, sondern um zweidimensionale Tupel, bestehend aus

- Abstand y des Lichtstrahls von der optischen Achse
- Anstieg α des Strahls gegen die optische Achse

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} y \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Man schreibt α , meint aber immer $\tan(\alpha)$.

Die x-Koordinate (optische Achse) kommt bei diesem Vektor nicht explizit vor. Sie ist indirekt in den Translationsmatrizen enthalten.

Wenn man sich – z.B. bei der Konstruktion eines Abbildes – für den Schnittpunkt zweier unterschiedlicher Strahlen interessiert, so setzt man nur die y-Werte gleich und meint damit stillschweigend „für dieselbe Stelle auf der optischen Achse“. Die α -Werte unterscheiden sich dabei normaler Weise. Anderenfalls wären die Strahlen identisch.

BEACHTEN:

Ein Strahl ist keine Strecke, er hat keine Länge. Man kann ihn als Punkt mit Anstieg verstehen, wobei die x-Koordinate sich nur aus dem Kontext ergibt.

3.2 Translationsmatrix T

Eine Translationsmatrix T soll die ungehinderte und ungebrochene Ausbreitung eines Strahls in *einem* Medium beschreiben. Diese Ausbreitung ist dadurch gekennzeichnet, dass der Winkel α konstant bleibt und die Höhe proportional zu d und α zunimmt (Strahlensatz).

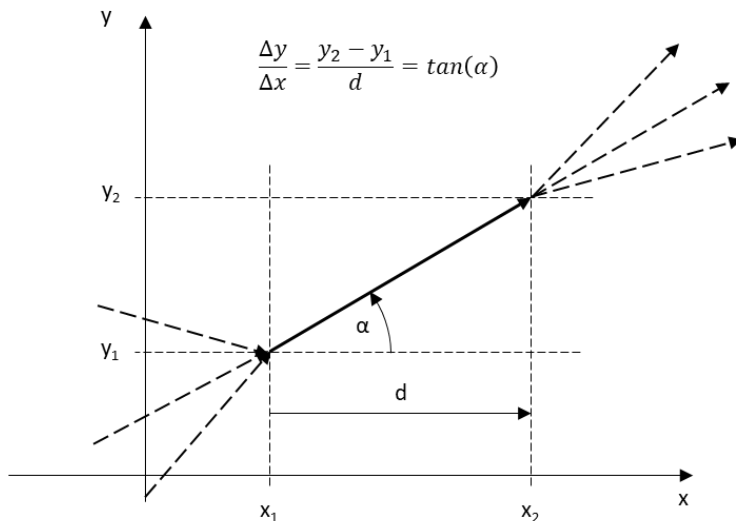


Abbildung 23: Ableitung der Gleichungen für eine Transfermatrix T

An der Abbildung erkennt man, dass

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + d \cdot \tan(\alpha_1) = 1 \cdot y_1 + d \cdot \alpha_1; \quad \alpha_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot \alpha_1$$

In Matrixschreibweise wird aus beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(T) = 1$	24
--	----

BEACHTEN:

Da der geradlinige Weg des Strahls in ein und demselben Medium stattfindet, ist die Determinante der Translationsmatrix = 1.

Damit kann der Weg eines Strahls bei ungebrochener, geradliniger Ausbreitung beschrieben werden. Typische Anwendungsfälle sind:

- Weg des Strahls von einem Körperpunkt zur Frontlinse des Systems
- Weg des Strahls zwischen zwei Linsen
- Weg des Strahls von der letzten Linse zu einem Schirm bzw. Sensor.

Würde man zwei Translationsmatrizen (warum auch immer) hintereinanderschalten, so würden sich die einzelnen x-Translationen d_1 und d_2 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die folgende Abbildung zeigt die drei üblichen Strahlen (Parallel-, Mittelpunkt- und Brennpunktstrahl), ausgehend von der Spitze eines Gegenstandes, der sich im Abstand a von der Hauptebene einer Linse mit der Brennweite f befindet. Die Formeln geben an, wie sich die Auftreffpunkte der Strahlen auf der Linsenebene berechnen.

Alle drei Anfangsstrahlen liegen im Punkt $(0, G)$, haben aber unterschiedliche Anstiege:

- Parallelstrahl, Anstieg = 0:

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Mittelpunktstrahl, Anstieg = -G/a

$$\vec{r}_M = \begin{pmatrix} G \\ -G/a \end{pmatrix}$$

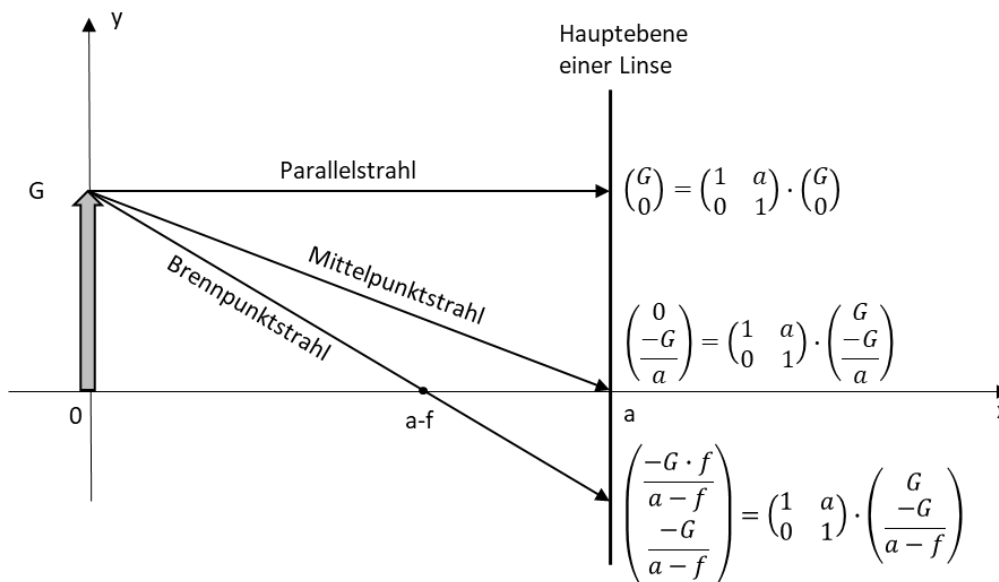
- Brennpunktstrahl, Anstieg = -G/(a-f)

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} G \\ -G/(a-f) \end{pmatrix}$$

BEACHTEN:

Obwohl alle drei Strahlen im Punkt(G,0) beginnen, sind sie wegen des unterschiedlichen Anstieges doch unterschiedlich.

Die Strahlen enden alle genau auf der Linsen-Hauptebene (x=a), treffen aber in unterschiedlichen Höhen ein.



3.3 Brechungsmatrizen B

3.3.1 Brechung eines Strahls an einer ebenen Grenzfläche

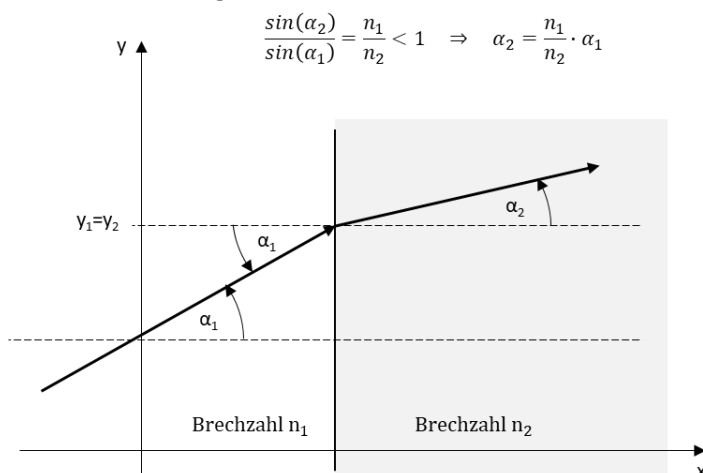


Abbildung 24: Brechung eines Strahls an einer ebenen Grenzfläche

Man liest an der Abbildung 24 ab:

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \alpha_1; \quad \alpha_2 = 0 \cdot y_1 + \frac{n_1}{n_2} \cdot \alpha_1$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad \det(B) = \frac{n_1}{n_2}$	25
--	----

BEACHTEN:

Da auf beiden Seiten der brechenden Grenzfläche unterschiedliche Brechzahlen vorliegen, ist die Determinante der Brechungsmatrix verschieden von 1.

3.3.2 Brechung eines Strahls an einer sphärischen Grenzfläche

Vor der Grenzfläche sei die Brechzahl n_1 , dahinter n_2 . Die folgende Ableitung linearer Beziehungen gelingt wieder nur für paraxiale Strahlen.

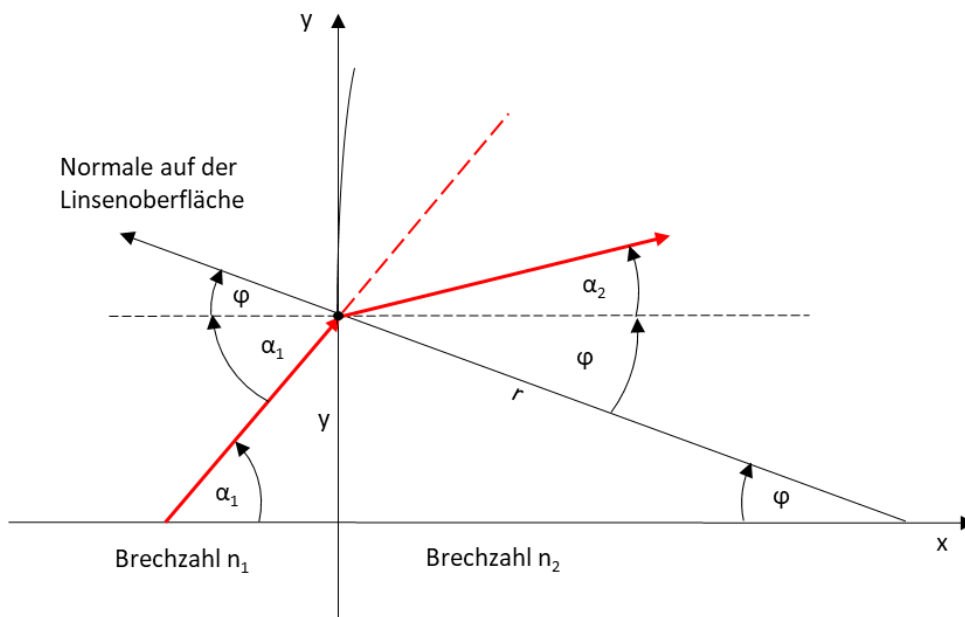


Abbildung 25: Brechung eines Strahls an einer sphärischen Grenzfläche

An der Abbildung 25 liest man für den Fall einer konvexen Oberfläche sofort ab:

$$\varphi = \frac{y}{r}; \quad (\alpha_2 + \varphi) = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\alpha_1 + \varphi) = k \cdot (\alpha_1 + \varphi); \quad k = \frac{n_1}{n_2}$$

Da sich die Höhe y bei der Brechung nicht ändert, bekommt man folgende linearisierten Gleichungen:

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \alpha_1; \quad \alpha_2 = -(1 - k) \cdot \varphi + k \cdot \alpha_1 = -\frac{(1 - k)}{r} \cdot y_1 + k \cdot \alpha_1$$

Das entspricht der Brechungsmatrix:

$$B_{konvex} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-k)}{r} & k \end{pmatrix}; \quad \det(B) = k = \frac{n_1}{n_2}; \quad r > 0$$

26

Ganz analog leitet man die Gleichungen für die Brechung an einer konkaven sphärischen Oberfläche ab:

$$B_{konkav} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{(1-k)}{r} & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-k)}{(-r)} & k \end{pmatrix}; \quad \det(B) = k = \frac{n_1}{n_2}; \quad r > 0$$

27

BEACHTEN:

Die beiden Gleichungen (26) und (27) gelten für positive Radius-Werte. Der einzige Unterschied zwischen ihnen besteht im Vorzeichen des Elementes $B_{konkav}[1,2]$. Setzt man den Radius der konkaven Grenzfläche wie üblich als negativ an, so stimmen beide Formeln überein.

Im Abschnitt 3.5.5 werden wir mit den Brechungsmatrizen an sphärischen Grenzflächen die Linsenschleiferformel ableiten.

3.3.3 Brechung eines Strahls an einer dünnen Linse

Parallele Strahlen, die auf eine Sammellinse treffen, verlaufen ausgangsseitig alle durch einen Punkt in der Brennebene. Die Brennebene ist parallel zur Hauptebene der Linse und geht durch den Brennpunkt F. Dieser Sammelpunkt S wird über den Mittelpunktstrahl bestimmt, der die Linse ungebrochen passiert und die Brennebene schneidet.

In der folgenden Abbildung ist der zum Ursprungsstrahl parallele Mittelpunktstrahl eingetragen, der die Brechungsebene der Linse (=Hauptebene) im Auftreffpunkt A erreicht. (Anstelle von h benutzen wir die Auftreffhöhe y_A .) Der Mittelpunktstrahl schneidet die Brennebene bei $x=f$ im Punkt S. Die Verbindung des Auftreffpunktes A auf die Linsenebene mit dem Punkt S ergibt den gebrochenen Strahl (rot).

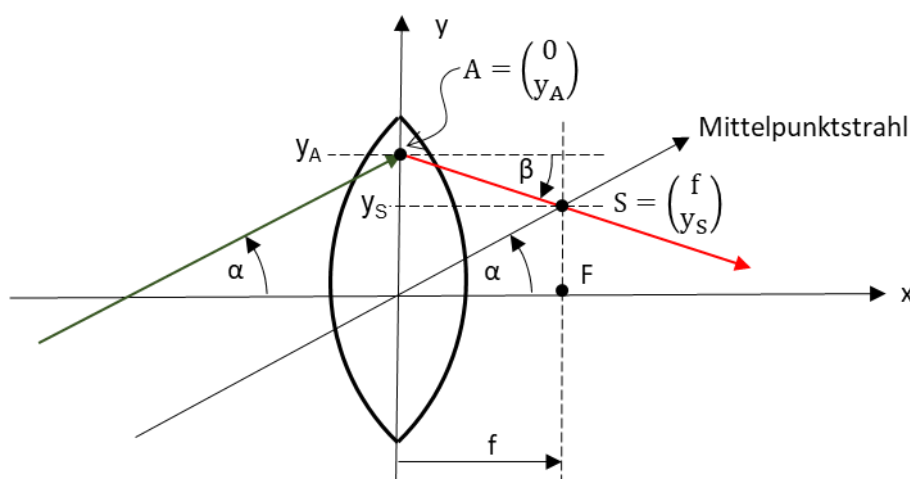


Abbildung 26: Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsstrahl

Der y -Wert des Punktes S berechnet sich aus dem Winkel α und der Brennweite so:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_S}{f} \Rightarrow y_S = f \cdot \tan(\alpha)$$

Für den Winkel β gilt:

$$\tan(\beta) = \frac{y_S - y_A}{f - 0} = \frac{f \cdot \tan(\alpha) - y_A}{f} = \tan(\alpha) - \frac{y_A}{f} \quad 28$$

Wir prüfen die Formel für die drei häufig verwendeten Sonderstrahlen:

- Achsenparalleler Strahl (=Parallelstrahl)

$$\alpha = 0 \Rightarrow \tan(\alpha) = 0 \Rightarrow \tan(\beta) = -\frac{y_A}{f}$$

Das ist gerade das Steigungsdreieck vom Auftreffpunkt zum Brennpunkt F. Der gebrochene Parallelstrahl verläuft durch den Brennpunkt F.

- Mittelpunktstrahl

$$y_A = 0 \Rightarrow \tan(\alpha) = \tan(\beta)$$

Der Mittelpunktstrahl passiert die Linse ungebrochen.

- Brennpunktstrahl

$$\tan(\alpha) = \frac{y_A}{f} \Rightarrow \tan(\beta) = \frac{y_A}{f} - \frac{y_A}{f} = 0$$

Der Brennpunktstrahl auf der Gegenstandsseite verläuft auf der Bildseite achsenparallel.

Man kann leicht zeigen, dass die Gl (28) auch für Konkavlinen gilt, die eine negative Brennweite haben. In diesem Fall ist der Austrittswinkel größer als der Eintrittswinkel.

Um die abgeleitete Brechungsbeziehung in Matrizenform zu schreiben, verwenden wir in Gl () wieder die Indizes für Einfall- und Ausfallstrahl:

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \alpha_1 \quad \alpha_2 = -\frac{1}{f} \cdot y_1 + 1 \cdot \alpha_1$$

Oder

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot y_1 \\ -\frac{1}{f} y_1 + \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad \det(B) = 1$	29
---	----

BEACHTEN: Die Brechzahl n der Linse geht in die Brennweite f ein. B gilt sowohl für Konvex- als auch für Konkavlinen. Für letztere muss eine negative Brennweite eingesetzt werden.

Wenn – wie hier stillschweigend vorausgesetzt – die Linse von einem einzigen Medium umgeben ist, so ist die Determinante der Brechungsmatrix = 1.

Der Vorteil der Matrixschreibweise besteht darin, dass man mehrere Brechungen an aufeinanderfolgenden Linsen durch Verkettung der Matrizen beschreiben kann.

3.4 Berechnung der Brennweiten und der Hauptebenen aus einer Transfermatrix

Wenn man die Transfermatrix L eines optischen Systems als Produkt mehrerer Brechungs- und Translationsmatrizen der Systemelemente berechnet hat, so kann man daraus die objekt- und bildseitigen Brennweiten und Hauptebenen leicht berechnen.

Es sei eine Transfermatrix L gegeben:

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad [A] = 1; \quad [B] = m; \quad [C] = \frac{1}{m}; \quad [D] = 1$$

30

Zur Berechnung der bildseitigen Brennweite f_2 und Lage der Hauptebene h_2 speisen wir einen Parallelstrahl (Höhe =1, Winkel=0) in das System ein und berechnen den Ausgangsstrahl.

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

Dieser Strahl passiert die optische Achse im bildseitigen Brennpunkt F_2 . In Matrixschreibweise bedeutet das, dass er eine variable Translation der Länge x_2 durchläuft:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C \cdot x_2 \\ C \end{pmatrix}$$

Aus der oberen Gleichung ergibt sich der x-Wert des bildseitigen Brennpunktes:

$$x_2 = -\frac{A}{C}$$

31

BEACHTEN:

Der Wert x_2 ist nicht die Brennweite, diese wird bezüglich der Hauptebene gemessen.

Man hätte auch die Geradengleichung im Punkt $(0, A)$, an dem der Strahl das System unter dem Winkel C verlässt, aufstellen können:

$$y(x) = A + C \cdot x \quad \text{und} \quad y(x_2) = 0 = A + C \cdot x_2$$

Der Abstand h_2 der bildseitigen Hauptebene vom Systemausgang ($x=0$) ergibt sich als Schnittpunkt des verlängerten Parallelstrahls mit dem Ausgangsstrahl:

$$y(h_2) = 1 = A + C \cdot h_2$$

$$h_2 = \frac{1 - A}{C}$$

32

Für die bildseitige Brennweite f_2 bekommt man:

$$f_2 = x_2 - h_2 = -\frac{A}{C} - \left(\frac{1 - A}{C}\right) = -\frac{1}{C}$$

33

Um die objektseitigen Werte zu bekommen speist man einen Parallelstrahl von hinten in das System ein. Um aber die optische Achse weiterhin von links nach rechts zu orientieren, dreht man das System um, sodass die Bildseite zur neuen Objektseite wird. Und umgekehrt.

Mathematisch bedeutet das die Invertierung der Transfermatrix L :

$$L_I = \begin{pmatrix} A_I & B_I \\ C_I & D_I \end{pmatrix}$$

Dabei gilt für die Koeffizienten A_I bis D_I der inversen Matrix:

$$A_I = \frac{D}{|L|}; \quad B_I = \frac{-B}{|L|}; \quad C_I = \frac{-C}{|L|}; \quad D_I = \frac{A}{|L|}; \quad |L| = A \cdot D - B \cdot C = 1$$

BEACHTEN:

Die Determinante einer Transfermatrix ist gleich 1, wenn vor dem System derselbe Brechungsindex wie dahinter besteht, wenn das System also z.B. gänzlich in Luft eingeschlossen ist. Das gilt wie oben bereits beschrieben für die elementaren Translations- und Brechungsmatrizen genauso, wie für jeder ihrer Zusammenschaltungen. [Photonik]

Damit kann man die Gl(36) bis (33) direkt mit den Koeffizienten der invertierten Matrix schreiben:

$x_1 = -\frac{A_I}{C_I} = \frac{D}{C}$	34
--	----

$h_1 = \frac{1 - A_I}{C_I} = \frac{D - 1}{C}$	35
---	----

$f_1 = x_1 - h_1 = \frac{D}{C} - \left(\frac{D - 1}{C}\right) = \frac{1}{C}$	36
--	----

3.5 Beispiele zu Transfermatrizen

3.5.1 Linsensystem aus zwei Linsen im Abstand $d = 0$

Wir betrachten ein Linsensystem aus zwei Linsen (Brennweiten f_1 und f_2) im Abstand $d=0$:

Die resultierende Brechungs-Matrix des Systems ist dann:

$$B_{Sys} = B_2 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{Sys}} & 1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt die bekannte Formel für die Systembrennweite eines Linsensystems, dessen Linsen einen sehr kleinen Abstand haben.

Führt man für den reziproken Wert der Brennweiten den häufig verwendeten Brechwert D ein, so addieren sich diese Werte ganz ähnlich wie die Translationen zweier T-Matrizen:

$$B_{Sys} = B_2 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(D_1 + D_2) & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.2 Linsensystem aus zwei Linsen im Abstand $d > 0$

Wir betrachten ein Linsensystem aus zwei Linsen (Brennweiten f_1 und f_2) im Abstand $0 < d < f_1, f_2$:

Die resultierende Transfer-Matrix L des Systems ist dann:

$$L = B_2 \cdot T \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right) & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Man prüft leicht, dass tatsächlich $\det(L) = A \cdot D - B \cdot C = 1$ ist. Außerdem ist $A > 0$, $B > 0$, $D > 0$ und $C < 0$.

Die Systembrennweite $-f_{\text{sys}}$ für das Linsensystem gilt nach Gl (38):

$$f_{\text{sys}} = -\frac{1}{C} = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right)} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} > 0$$

Die Lage der Hauptebene H_2 ist:

$$h_2 = \frac{1 - A}{C} = \frac{1 - \left(1 - \frac{d}{f_1}\right)}{-\frac{1}{f_{\text{sys}}}} = -f_{\text{sys}} \cdot \frac{d}{f_1} < 0$$

$$h_1 = \frac{D - 1}{C} = \frac{\left(1 - \frac{d}{f_2}\right) - 1}{-\frac{1}{f_{\text{sys}}}} = f_{\text{sys}} \cdot \frac{d}{f_2} > 0$$

3.5.3 Ableitung der Abbildungsgleichung mittels Matrizen

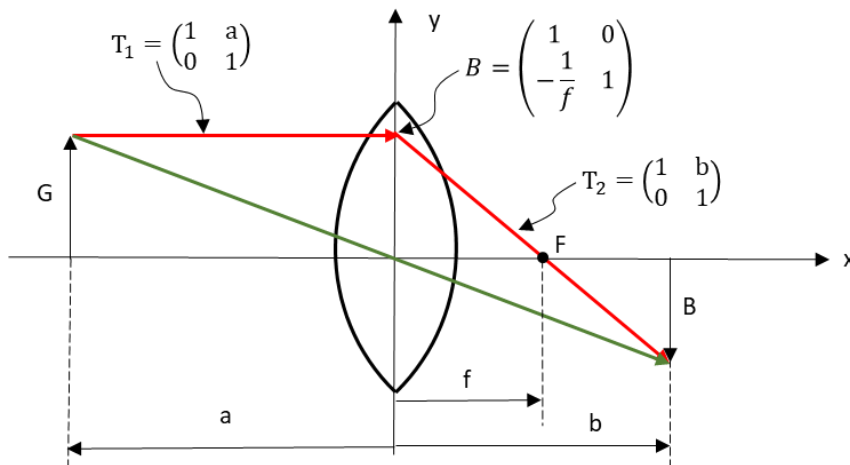


Abbildung 27: Ableitung der Abbildungsgleichung über Matrizen

Wir wollen wie üblich einen Parallelstrahl und einen Mittelpunktstrahl an einer dünnen Linse betrachten. Der Nullpunkt der optischen x-Achse liege in der Linse. Beide Strahlen beginnen im Gegenstandspunkt $(-a, G)$ und enden im Bildpunkt (b, B) . Im Abstand b von der Linse entsteht ein scharfes Bild.

Auch wenn beide Strahlen unterschiedliche Wege zurücklegen, ist die Gesamt-Übertragungsmatrix L dieselbe. Sie besteht aus einer Translation der Länge a (nicht $-a!$), einer Brechung mit der Brennweite f und einer erneuten Translation der (noch unbekannt) Länge x .

$$L = T_2 \cdot B \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{a}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f} & a + x \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{a}{f} \end{pmatrix}$$

Der Parallelstrahl und der Mittelpunktstrahl haben folgende Gleichungen:

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_M = \begin{pmatrix} G \\ -\frac{G}{a} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst den Ausgangsstrahl zum Parallelstrahl an der variablen, noch unbekanntem Stelle x auf der Bildseite:

$$\vec{r}_{P-Bild} = L \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f} & a + x \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{a}{f} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \cdot \left(1 - \frac{x}{f}\right) \\ -\frac{G}{f} \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f} \\ -\frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Für $x=f$ ist die Höhe des gebrochenen Parallelstrahls = 0. Dieser verläuft daher wie erwartet durch den Brennpunkt. Das bestätigt auch der Ausdruck für den Winkel, (bzw. den Anstieg) des Strahls = $-G/f$.

Ein reelles Bild entsteht erst in Kombination mit dem Mittelpunktstrahl.

$$\vec{r}_{M-Bild} = L \cdot \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f} & a + x \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{a}{f} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ -\frac{G}{a} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f} - \frac{1}{f} \left(a + x \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \right) \\ -\frac{1}{f} - \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \end{pmatrix}$$

Zunächst erkennt man, dass der Mittelpunktstrahl nicht gebrochen wird, da sein Austrittswinkel gleich dem Eintrittswinkel ist:

$$\alpha_{M-Bild} = G \cdot \left(-\frac{1}{f} - \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \right) = -\frac{G}{a} = \alpha_M$$

Ein scharfes Bild entsteht genau bei demjenigen x-Wert, bei dem sich beide Strahlen schneiden, wo also ihre y-Werte gleich sind. In diesem Fall ist $x = b$ die Bildweite des scharfen Bildes.

Gleichsetzen ergibt nach Kürzen von G:

$$1 - \frac{b}{f} = 1 - \frac{b}{f} - \frac{1}{f} \left(a + b \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \right) \Rightarrow 0 = \frac{1}{f} \left(a + b \cdot \left(1 - \frac{a}{f}\right) \right) \Rightarrow 0 = a + b - \frac{a \cdot b}{f}$$

Division durch $a \cdot b$ ergibt die bekannte Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

BEACHTEN:

Um den Schnittpunkt zweier Strahlen zu berechnen muss man lediglich deren y-Komponenten gleichsetzen. Die α -Werte unterscheiden sich – anderenfalls wären die Strahlen völlig identisch. Im obigen Beispiel hat der Mittelpunktstrahl den Winkel $-G/a$, der gebrochene Parallelstrahl den Winkel $-G/f$.

Dass automatisch mit übereinstimmenden y-Werten auch die x-Werte gleich sind, ergibt sich daraus, dass beide Strahlen dieselben Translations-Matrizen durchlaufen haben. Damit haben sie denselben

x-Weg zurückgelegt, der gleich der Summe der Einzeltranslationen in den T-Matrizen ist, in diesem Fall a+b.

3.5.4 Strahlendurchgang durch eine plane optische Scheibe der Dicke d

Wir berechnen, wie ein Strahl eine ebene Scheibe der Dicke d passiert, wobei außerhalb der Scheibe die Brechzahl n_1 und innerhalb n_2 sein soll.

Dazu schalten wir unter Verwendung der Gleichungen (24) und (25) drei Matrizen in Reihe

$$L = B_2 \cdot T \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

$$\det(L) = \det(B_1) \cdot \det(T) \cdot \det(B_2) = \frac{n_1}{n_2} \cdot 1 \cdot \frac{n_2}{n_1} = 1$$

Der Eingangsstrahl wird durch B1 zum Lot hin gebrochen. Der Scheibendurchlauf wird durch T abgebildet, die Brechung des Ausgangsstrahls vom Lot weg durch B2.

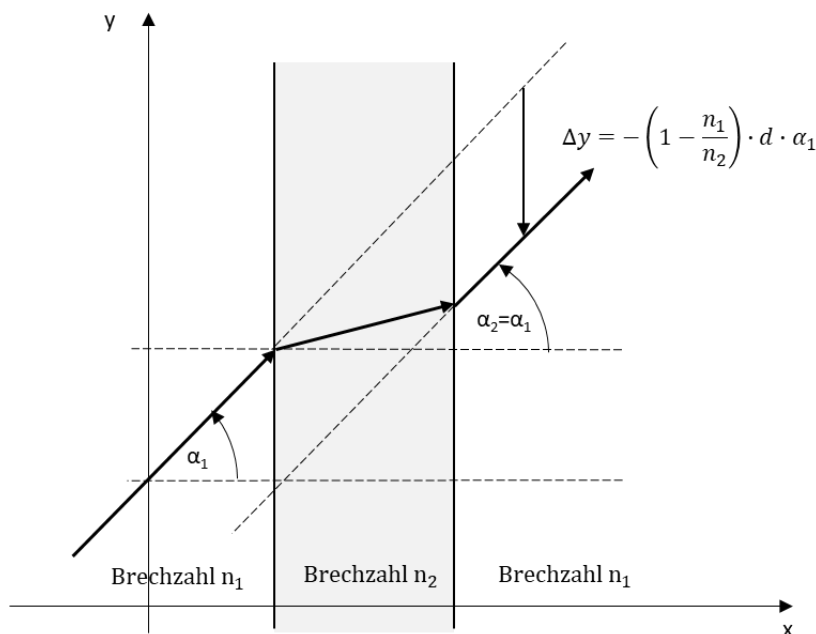
Multiplikation der Matrizen ergibt:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & d \cdot \frac{n_1}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als Gleichungen geschrieben:

$$y_2 = y_1 + d \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \alpha_1 = y_1 + d \cdot \alpha - \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot d \cdot \alpha_1; \quad \Delta y = -\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot d \cdot \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1$$



Der Strahl tritt im selben Winkel aus der Scheibe aus, unter dem er in sie eingetreten ist. Die beiden Brechungen heben sich gegenseitig auf.

Dafür kommt es zu einem Versatz in Richtung y, der von der Dicke d, dem Eintrittswinkel α_1 und dem Verhältnis der Brechzahlen abhängt. Der Austrittsstrahl eilt dem ungebrochenen Strahl um Δy nach.

BEACHTET:

Wir haben auch hier wieder mit den Näherungen der paraxialen Optik (kleine Winkel) gerechnet.

Lässt man diese Bedingung fallen, so ist nach wie vor der Eingangswinkel gleich dem Ausgangswinkel, und für den Versatz wird:

$$\Delta y = -d \cdot (\tan(\alpha) - \tan(\beta)) = -d \cdot \left(\tan(\alpha) - \tan\left(\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \alpha\right)\right) \right)$$

Für sehr kleine Winkel α bekommt man wieder den Wert von oben.

3.5.5 Ableitung der Linsenschleiferformel über die Transfermatrix

Ausgehend von der Brechungsmatrix an einer sphärischen Oberfläche betrachten wir den Strahlenweg durch eine bikonvexe Linse mit dem linksseitigen Radius $r_1 > 0$ und dem rechtsseitigen Radius $r_2 > 0$:

$$L = B_2 \cdot T \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{(1-\frac{1}{k})}{r_2} & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-k)}{r_1} & k \end{pmatrix}$$

$$\det(L) = \det(B_1) \cdot \det(T) \cdot \det(B_2) = \frac{1}{k} \cdot 1 \cdot k = 1$$

B_1 ist die Brechungsmatrix an einer konvexen, sphärischen Oberfläche nach Gl (26). T ist die Translationsmatrix beim Durchgang durch die Linse der Dicke d , die als konstant angenommen wird. Beim Austritt aus der bikonvexen Linse trifft der Strahl auf eine konkave sphärische Oberfläche nach Gl (27). B_2 ist die entsprechende Brechungsmatrix, wobei wir den reziproken k -Wert verwenden müssen, da sich beim Strahlaustritt die Bedeutungen von n_1 und n_2 gerade vertauschen.

Für den Strahl vor dem Linsenaustritt bekommen wir:

$$T \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-k)}{r_1} & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-k) \cdot d}{r_1} & d \cdot k \\ -\frac{(1-k)}{r_1} & k \end{pmatrix}$$

Die Brechung dieses Strahls beim Austritt aus der Linse liefert:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{(1-\frac{1}{k})}{r_2} & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-k) \cdot d}{r_1} & d \cdot k \\ -\frac{(1-k)}{r_1} & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-k) \cdot d}{r_1} & d \cdot k \\ \frac{(1-\frac{1}{k})}{r_2} \cdot \left(1 - \frac{(1-k) \cdot d}{r_1}\right) - \frac{(1-k)}{k \cdot r_1} & 1 + \frac{(1-\frac{1}{k}) \cdot d \cdot k}{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Für das Element C der Transfermatrix wird:

$$C = \frac{(k-1)}{k \cdot r_2} - \frac{(k-1) \cdot (1-k) \cdot d}{k \cdot r_2 \cdot r_1} - \frac{(1-k)}{k \cdot r_1} = -\frac{(1-k)}{k} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(1-k) \cdot d}{r_1 \cdot r_2} \right)$$

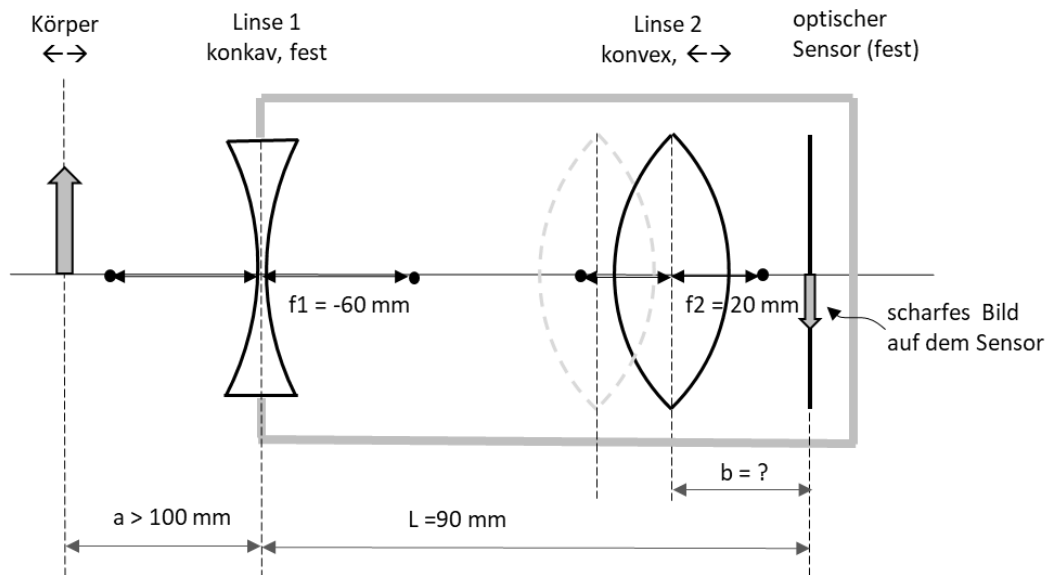
Mit Gl (33) bekommen wir für die reziproke Brennweite:

$$-C = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(n_2 - n_1) \cdot d}{n_2 \cdot r_1 \cdot r_2} \right)$$

Das entspricht genau der Linsenschleiferformel nach Gl (1), wenn man dort ein negatives R_2 einsetzt.

4 Beispiel: Linsensystem mit beweglicher Sammellinse zur Fokussierung

4.1 Aufgabe



Gegeben ist das abgebildete Linsensystem bestehend aus

- einer festen, symmetrischen Zerstreulinse mit einer Brennweite von -60 mm ,
- einem festen optischen Sensor im horizontalen Abstand von 90 mm von der Frontlinse,
- beweglichen Messkörpern im Abstand von $a > 100 \text{ mm}$ vor der Frontlinse,
- einer horizontal beweglichen, symmetrischen Sammellinse zwischen Frontlinse und Sensor mit der Brennweite von 20 mm . Diese dient zum Fokussieren des Körperbildes auf dem Sensor.

Beide Linsen sind dünne Linsen, die Berechnung kann mithilfe einer einzigen zentralen Brechungsebene (=Hauptebene) erfolgen.

Frage:

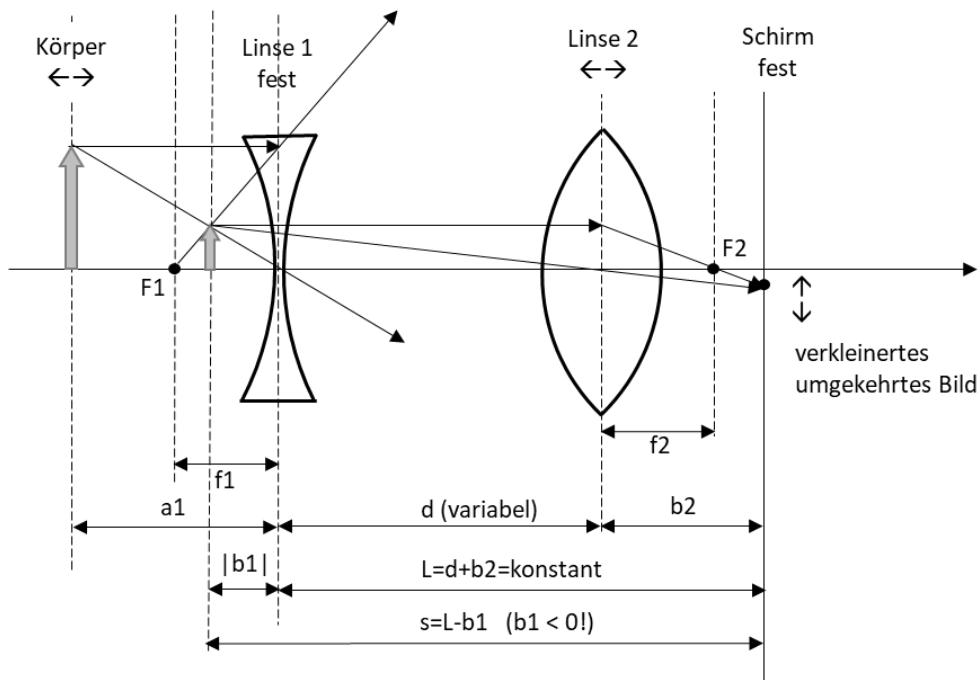
Auf welche Bildweite b muss man die Sammellinse einstellen, damit ein Gegenstand im Abstand a von der Frontlinse scharf auf dem Sensor abgebildet wird?

Es gibt mehrere unterschiedliche Verfahren zur Lösung des Problems.

4.2 Lösung über das Zwischenbild der Konkavlinse

Wir gehen davon aus, dass die Konkavlinse ein virtuelles Bild auf der Gegenstandsseite erzeugt, das seinerseits als Gegenstand für die Sammellinse dient.

Die folgende Abbildung zeigt die Zusammenhänge.



4.2.1 Berechnung des Zwischenbildes der Konkavlinse

Die bekannte Abbildungsgleichung gilt sowohl für Konvex- als auch für Konkavlinen.

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$$

Mit der negativen Brennweite $f_1 = -60$ mm der Konkavlinse bekommen wir für die Bildweite b_1 des virtuellen Bildes der Konkavlinse, das damit links von der Konkavlinse liegt:

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot f_1}{a_1 - f_1} < 0 \quad 37$$

4.2.2 Fokussierung des Zwischenbildes auf dem Sensor über die bewegliche Konvexlinse

Die Abbildungsgleichung der verschieblichen Sammellinse lautet:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{s - b_2} + \frac{1}{b_2}$$

Dabei ist die Variable s der Abstand des virtuellen Bildes der Linse 1, das den Gegenstand für die Linse 2 bildet, vom feststehenden Schirm:

$$s = L - b_1 = L - \frac{a_1 \cdot f_1}{a_1 - f_1} = \frac{L \cdot (a_1 - f_1) - a_1 \cdot f_1}{a_1 - f_1} = f(L, a_1, f_1) \quad 38$$

Die Variable s ist damit konstant bezüglich der Übertragung durch die Linse 2.

Die bewegliche Linse befindet sich zwischen Körper und Sensor und soll so eingestellt werden, dass auf dem Sensor ein scharfes Bild entsteht. Daraus ergibt sich die folgende quadratische Gleichung für

den Bildabstand b . Dabei lassen wir den Index „2“ weg, weil wir nur noch diese eine Bildweite betrachten. Die Variable s behandeln wir als Konstante.

$$\frac{1}{f_2} = \frac{s}{(s-b) \cdot b} \Rightarrow b^2 - s \cdot b + s \cdot f_2 = 0$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$b_{1,2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - s \cdot f_2} = \frac{s}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot f_2}{s}} \right) \quad 39$$

Zahlenbeispiel:

$$a = 240\text{mm}; f_1 = -60\text{mm}; f_2 = +20\text{mm}; L = 90\text{mm} \Rightarrow b_1 = 48\text{mm}; s = 138\text{mm}$$

$$b_{1,2} = 69\text{mm} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 20\text{mm}}{138\text{mm}}} \right) = 69 \cdot (1 \pm 0,648)\text{mm} \Rightarrow b_1 = 73,4\text{mm}; b_2 = 24,3\text{mm}$$

Die folgende Abbildung zeigt die Strahlengänge für beide Varianten.

BEACHTEN:

Es ist nur eine Linse vorhanden, die entweder weiter entfernt vom Sensor steht (grün, b_1), oder alternativ (nichts ist alternativlos!) näher am Sensor steht (blau, b_2). Die Strahlengänge der beiden Positionen können sich also gegenseitig nicht stören.

Aus abmessungstechnischen Gründen wird man die Einstellbarkeit der beweglichen Linse u.U. so beschränken, dass nur b_{n_2} (kleines Abbild, blau) möglich ist.

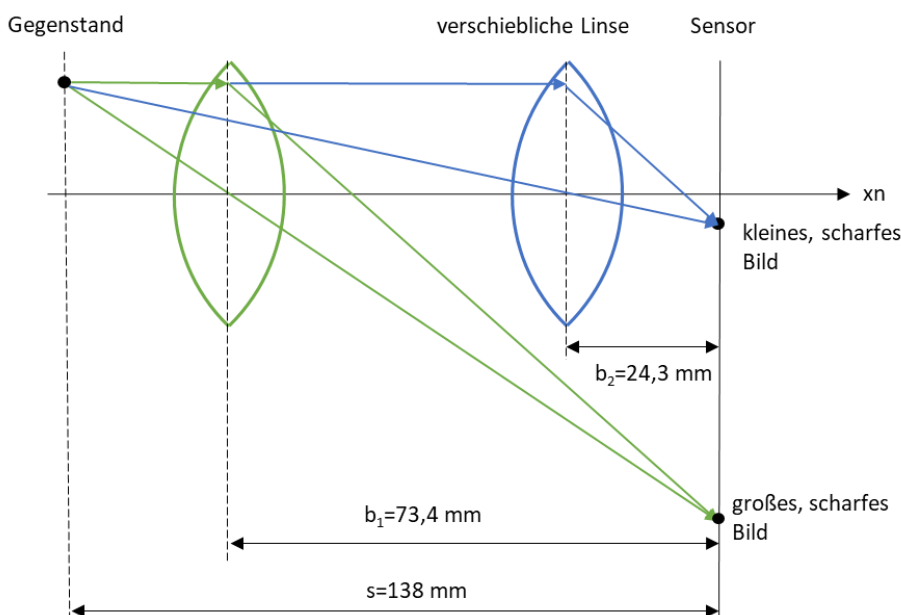


Abbildung 28: Strahlengang für die beiden Scharfstellungen der beweglichen Linse (nicht maßstabsgerecht)

Setzt man nun in Gl (39) den Wert für s aus Gl (38) ein, so hat man letztlich den gesuchten Zusammenhang a(b) des Linsensystems. Dabei schreiben wir für a₁ wieder a und beschränken uns auf das negative Vorzeichen der Wurzel.

$$b = \frac{L \cdot a - (L + a) \cdot f_1}{2 \cdot (a - f_1)} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot f_2 \cdot (a - f_1)}{(L \cdot a - (L + a) \cdot f_1)}} \right) \quad 40$$

Diese Gleichung gibt an, an welche Position b vor dem Sensor man die bewegliche Linse einstellen muss, damit man von dem Gegenstand im Abstand a von der Frontlinse ein scharfes Bild erhält.

Für immer größere Gegenstandsweiten a besitzt die Bildweite b ein Minimum, das man aus Gl **(Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.)** ermitteln kann:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} b(a) = b_{min} = \frac{L - f_1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot f_2}{(L - f_1)}} \right) = \frac{150}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 20}{150}} \right) \text{ mm} = 23,7 \text{ mm}$$

Die folgende Abbildung zeigt die nichtlineare Abhängigkeit b(a).

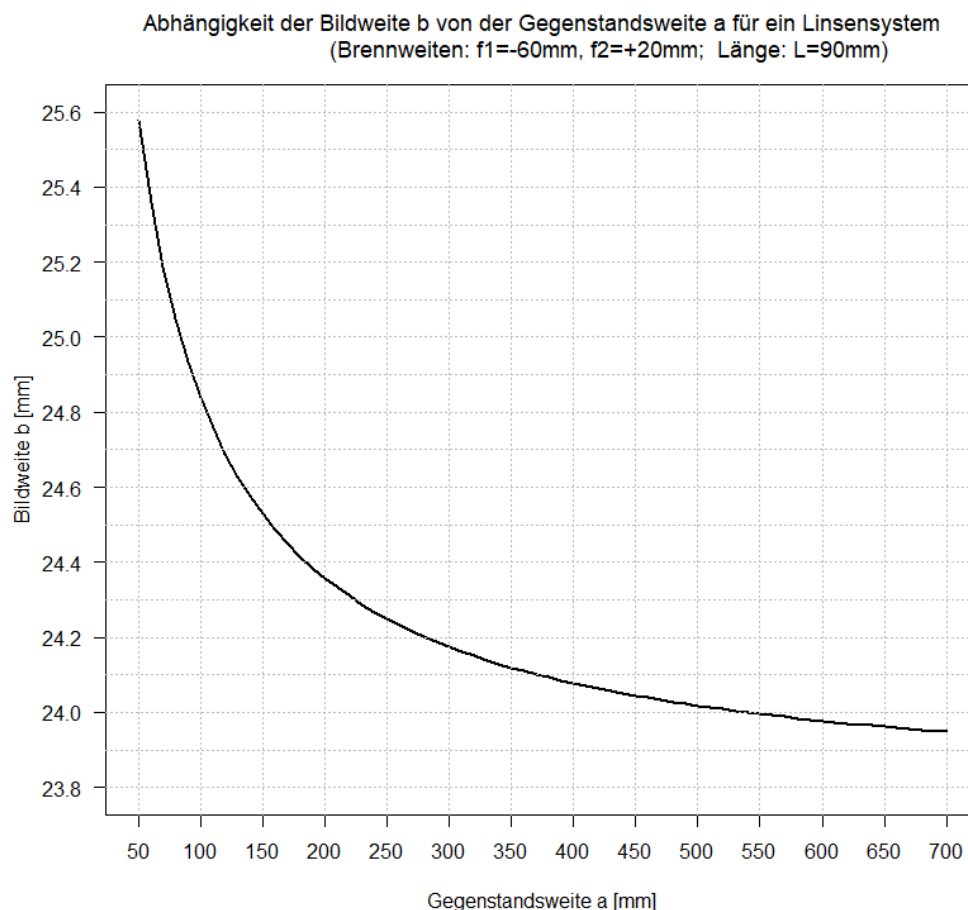


Abbildung 29: Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite a für ein Linsensystem

4.3 Lösung über die Methode der Ersatzlinse

Man kann jede Linsenkombination (Linsensystem) durch eine Systembrennweite f_{sys} und durch die Lage der beiden Brechungsebenen (=Hauptebenen) h_a und h_b beschreiben. Im vorliegenden Fall sind alle drei Größen direkt vom Abstand d und damit indirekt über $b=L-d$ auch vom eingestellten Bildabstand abhängig.

4.3.1 Brennweite und Lage der Hauptebenen der System-Linse (=Ersatzlinse)

Die Gleichung für die resultierende Brennweite (= Systembrennweite) einer Kombination dünner Linsen im gegenseitigen Abstand d nach **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** lautet:

$$\frac{1}{f_{\text{sys}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad 41$$

$$f_{\text{sys}}(d) = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{d}{(f_1 + f_2)}} \right) = \frac{f_{\text{sys}}(0)}{\left(1 - \frac{d}{(f_1 + f_2)}\right)}$$

Die Ersatzlinse für die Linsenkombination im Abstand d hängt natürlich neben den konstanten Brennweiten f_1 und f_2 der Einzellinsen auch vom Abstand d ab, wobei die Abhängigkeit nichtlinear ist.

Speziell für die Zahlenwerte der Aufgabenstellung erhält man:

$$f_{\text{sys}}(d) = \frac{f_{\text{sys}}(0)}{\left(1 - \frac{d}{(f_1 + f_2)}\right)} = \frac{30}{\left(1 + \frac{d}{40}\right)} \text{ mm} \quad 42$$

BEACHTEN: Die Summe f_1+f_2 ist negativ, deshalb kehrt sich im letzten Bruch das Vorzeichen um!

Da die Brechkraft der beteiligten Sammellinse größer als die Streukraft der Konkavlinse ist, ist die Systembrennweite stets positiv; die Ersatzlinse ist für alle erlaubten Linsenabstände d konvex.

Die Brennweite allein reicht aber nicht zur Berechnung der Strahlengänge. Da die Ersatzlinse keine dünne Linse sein kann, wird sie durch zwei Brechungsebenen (= Hauptebenen H und H') beschrieben.

Die Lage der Hauptebenen wird üblicher Weise bezüglich der Linsen angegeben.

Der Abstand h_a der Hauptebene H auf der Gegenstandsseite ist:

$$h_a = f_{\text{sys}} \cdot \frac{d}{f_2} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \cdot \frac{d}{f_2} = \frac{f_1 \cdot d}{f_1 + f_2 - d} \quad 43$$

Im vorliegenden Fall ist $h_a > 0$, die Hauptebene H liegt also rechts von der Zerstreulinse.

Der Abstand h_b der Hauptebene auf der Bildseite ist:

4.3.3 Lösung der nichtlinearen Gleichung für b

Man kann diese nichtlineare Gleichung mit entsprechenden Tools lösen.

Wegen des eingeschränkten Bereiches für d: $0 \leq d \leq L$ kann man aber in einem Computerprogramm einfach in einer Schleife die Gl (45) für alle Werte von d mit $\Delta d = 0.01$ mm berechnen und dann jeweils bei $|L-(d+b)| < \epsilon$ abbrechen. Das simuliert die manuelle Fokussierung der Sammellinse bei vorgegebener Gegenstandsweite a.

```
focus = function(a, L, f1, f2) {
  # Berechnung über System-Ersatz-Linse
  for(d in seq(1,90,0.01)) # d = Linsenabstand zum Fokussieren ändern
  {
    fsys=f1*f2/(f1+f2-d) # System-Brennweite als Fkt von d
    ha=fsys*d/f2         # Abstand H' von H2 (H' liegt rechts von H2)
    asys=a+ha           # Gegenstandsweite bzgl. Ersatzlinse H

    hb=fsys*d/abs(f1)   # Abstand H von H1 (H liegt rechts von H1)
    bsys=1/(1/fsys-1/asys) # Bildweite bzgl. Ersatzlinse H'

    b=bsys+hb
    delta=abs(L-b-d)
    if(delta < 0.05) {
      return (list(a=a,d=d,b=b,fsys=fsys,ha=ha,hb=hb))
    }
  }
  return(0)
}
```

Die Ergebnisse stimmen genau mit denen in Abbildung 29 überein und werden deshalb hier nicht noch einmal wiederholt.

4.4 Lösung über Transfermatrizen

4.4.1 Berechnung der Transfermatrix

Diese Lösung deuten wir hier nur an. Ausgangspunkt ist die vektorielle Beschreibung eines Lichtstrahls durch seine Höhe y über der zentralen optischen x-Achse (von links nach rechts) und seinen Anstieg:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} y \\ \tan(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Man schreibt α , meint aber $\tan(\alpha)$. Diese so definierten „Vektoren“ sind keine Vektoren im üblichen Sinne, die zwei Ortskoordinaten (x, y) enthalten, sondern einfach mathematische Zweier-Tupel, die es erlauben die bekannte Matrizenrechnung zu verwenden.

$$\begin{pmatrix} y_s \\ \alpha_s \end{pmatrix} = T_3 \cdot B_2 \cdot T_2 \cdot B_1 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} y_e \\ \alpha_e \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_e \\ \alpha_e \end{pmatrix}$$

T steht für eine sog. Translationsmatrix, die die ungebrochene, geradlinige Ausbreitung eines Strahl beschreibt. Das rechte obere Element ist die Entfernung auf der x-Achse, die der Strahl – z.B. zwischen zwei Linsen – zurücklegt.

B steht für eine Brechungsmatrix, die die Brechung des Strahls an eine Linse mit der Brennweite f beschreibt.

Fasst man alle Matrizen zusammen, so entsteht die sog. Transfermatrix des gesamten Systems, die wir hier mit L bezeichnen.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigentlich müsste man die Restriktion $d=L-b$ einsetzen, was die Rechnung aber verkompliziert. Wir ersetzen das danach. Wir multiplizieren von hinten beginnend, also in Richtung der positiven x-Achse und interpretieren die Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & +a + d \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{a}{f_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & +a + d \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \\ -\frac{1}{f_2} \cdot \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) - \frac{1}{f_1} & -\frac{a}{f_2} - \frac{d}{f_2} \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) + \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & +a + d \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right) & -\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung wurde der Strahl bereits an der zweiten Linse gebrochen. Deshalb findet man im linken unteren Element die Gleichung für die Systembrennweite zweier dünner Linsen im Abstand d.

$$L = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} - b \cdot \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right) & +a + d \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) + b \cdot \left(-\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right)\right) \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right) & -\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \end{pmatrix}$$

Diese Transfermatrix L beschreibt das gesamte Linsensystem inklusive Strahlengang vom Gegenstand zur Linse 1 und von der Linse 2 zum Schirm.

4.4.2 Beaufschlagung der Transfermatrix mit Parallel- und Mittelpunktstrahl

Diese Systemmatrix wollen wir nun mit einem Parallelstrahl beaufschlagen, der in der Höhe G (Gegenstandshöhe) mit dem Winkel 0 beginnt, wodurch wir auf dem Schirm bekommen:

$$\begin{pmatrix} y_{SP} \\ \alpha_{SP} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir interessieren uns nur für den y-Wert:

$$y_{SP} = G \cdot \left[1 - \frac{d}{f_1} - b \cdot \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right) \right]$$

Es folgt wie üblich die Beaufschlagung mit einem Mittelpunktstrahl, der in der Höhe G (Gegenstandshöhe) mit dem Winkel $-G/a$ beginnt, wodurch wir auf dem Schirm bekommen:

$$\begin{pmatrix} y_{SM} \\ \alpha_{SM} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} G \\ -\frac{G}{-a} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} G \\ -\frac{G}{a} \end{pmatrix}$$

Wir interessieren uns nur für den y-Wert:

$$y_{SM} = G \cdot \left[1 - \frac{d}{f_1} - b \cdot \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \right) \right] - \frac{G}{a} \cdot \left[+a + d \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) + b \cdot \left(-\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) \right) \right]$$

Ein scharfes Bild bekommen wird dann, wenn das Abbild beider Strahlen, die ja im selben Punkt starten, wieder in einem Punkt zusammenfällt, wenn als $y_{SP}=y_{SM}$.

Wir kürzen G und erkennen, dass der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer bei beiden Strahlen derselbe ist und nach dem Gleichsetzen deshalb wegfällt, also:

$$0 = +a + d \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) + b \cdot \left(-\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) \right)$$

Oder nun $d=L-b$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= +a + (L - b) \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) + b \cdot \left(-\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{(L - b)}{f_2} \right) \right) \\ &= +a + L \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) - b \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) + b \cdot \left(-\frac{a}{f_2} + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) - \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot \frac{(L - b)}{f_2} \right) \\ &= a + L \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) + \left(-\frac{a}{f_2} - \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot \frac{L}{f_2} \right) \cdot b + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot \frac{1}{f_2} \cdot b^2 \\ &= f_2 \cdot \left(a + L \cdot \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \right) - \left(a + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) L \right) \cdot b + \left(1 - \frac{a}{f_1} \right) \cdot b^2 \\ &= b^2 - \left(\frac{a}{\left(1 - \frac{a}{f_1} \right)} + L \right) \cdot b + \left(\frac{a}{\left(1 - \frac{a}{f_1} \right)} + L \right) \cdot f_2 \\ &= b^2 - \left(\frac{f_1 \cdot a}{(f_1 - a)} + L \right) \cdot b + \left(\frac{f_1 \cdot a}{(f_1 - a)} + L \right) \cdot f_2 \\ &= b^2 - \left(L - \frac{a \cdot f_1}{(a - f_1)} \right) \cdot b + \left(L - \frac{a \cdot f_1}{(a - f_1)} \right) \cdot f_2 \end{aligned}$$

In den runden Klammern steht wieder die bereits oben benutzte Abkürzung

$$s = L - b_1 = L - \frac{a \cdot f_1}{(a - f_1)}$$

Damit bekommt man wieder dieselbe quadratische Gleichung für $b=f(a)$ wie Gl (39) und damit natürlich auch dieselbe Lösung.

$$b^2 - s \cdot b + s \cdot f_2 = 0$$

Natürlich war hier bei der analytischen Matrizen-Berechnung der Aufwand sehr viel höher als bei der Lösungsvariante über das Zwischenbild. Bei größeren Linsensystemen, wo man ohnehin keine

analytische Lösung mehr erreichen kann und eine Computerlösung benötigt, ist die Matrixvariante allerdings klar im Vorteil.

4.5 Approximation der Übertragungsfunktion $b(a)$ durch eine Hyperbel (EXCEL-Solver)

Über drei verschiedene Berechnungsverfahren (Zwischenbild, Systemlinse und Transfermatrix) wurden identische Ergebnisse erzielt, in denen die Übertragungsfunktion $b(a)$ das Aussehen einer Hyperbel hat. Deshalb machen wir den folgenden Ansatz:

$$b_{Hyp}(a) = b_{\infty} + \frac{k}{a} \quad [k] = m^2 \quad 46$$

Dabei sind b_{∞} und k frei wählbare Parameter, die durch EXCEL-Solver gefunden werden sollen.

Abbildung 31 zeigt das EXCEL-Sheet mit den Spalten für die Original-Übertragungsfunktion nach Gl (Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.) in Spalte B und für die Hyperbel-Näherung nach Gl (46) in Spalte C. Die Konstanten und Parameter stehen in den ersten 6 Zeilen. In Spalte D stehen die Abweichungsquadrate, die in Zelle D33 (rot) aufsummiert wurden. Diese Zelle D33 ist das Optimierungsziel in der Maske von EXCEL-Solver. Als veränderliche Variablenzellen werden Solver die Zellen \$b\$5 und \$b\$6 mitgegeben. Diese Zellen müssen in den Berechnungsformeln vorkommen.

In diesen Zellen stehen vor der Berechnung durch Solver sinnvolle Startwerte (z.B. $k=10$, $b_{\infty}=10$) und danach im Erfolgsfall die optimalen Werte, für die die Summe der Fehlerquadrate minimal wird:

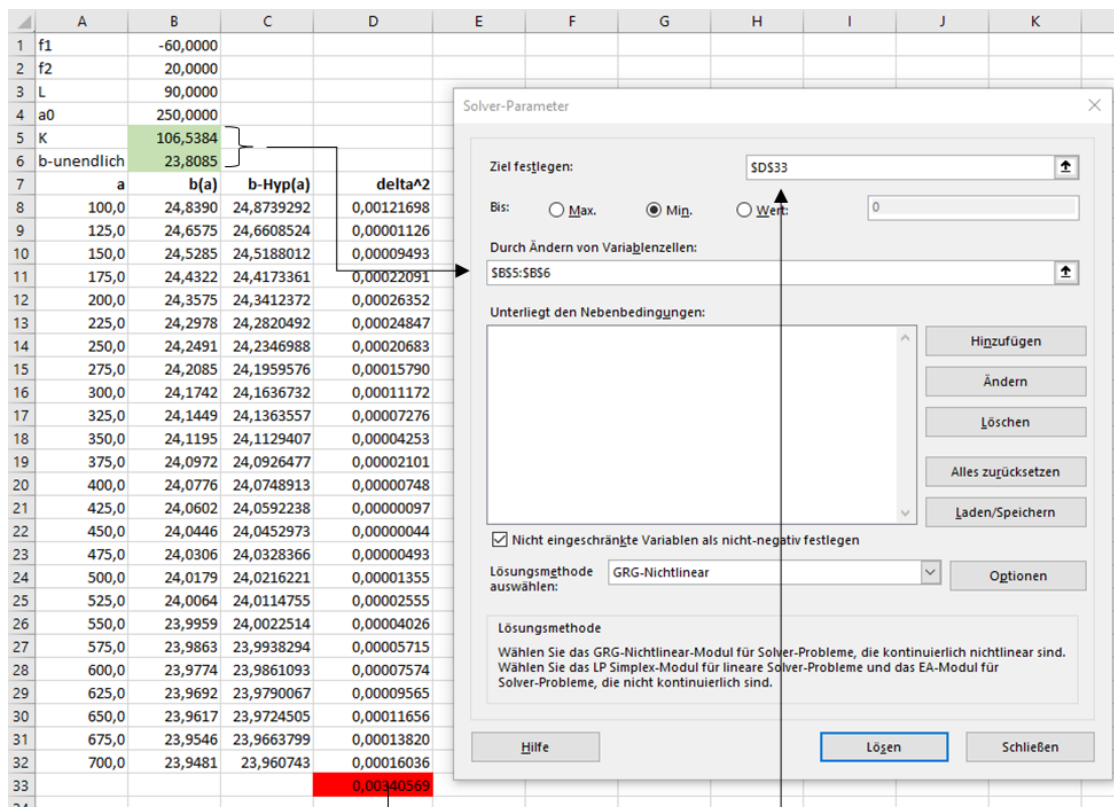


Abbildung 31: EXCEL-Sheet mit EXCEL-Solver-Eingabemaske

Die von EXCEL-Solver optimierten Parameter lauten:

$$k = 106,6 \text{ mm}^2 \quad b_{\infty} = 23,8 \text{ mm}$$

$$b_{\min} = 23,7\text{mm}$$

Dass $b_{\infty}=b_{\min}$ ist, war zu erwarten. Insofern hätte man anstelle des Parameters b_{∞} auch gleich den festen Wert b_{\min} nehmen können.

Wie Abbildung 32 zeigt, ist die Näherung durch die Hyperbel sehr gut. Der maximale Fehler liegt für jeden Einzelwert unter 1‰. (Das in der Abbildung überhaupt Abweichungen zu sehen sind, liegt an der extremen Spreizung der b-Achse auf den minimalen Bereich [23,8-25,0].)

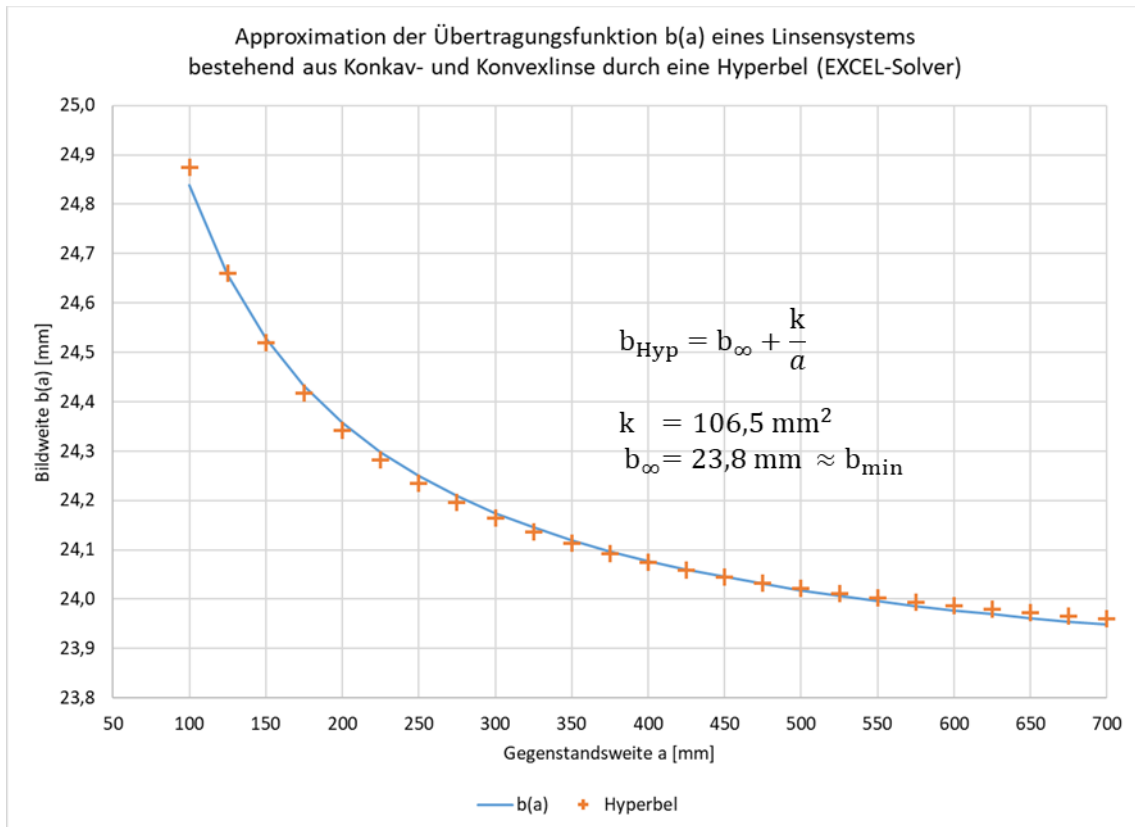


Abbildung 32: Fitting der Übertragungsfunktion eines Linsensystems durch eine Hyperbel

Setzt man in Gl (46) einen festen Messwert $b(a_0)$ ein, so kann man eine Gleichung zwischen den Differenzen Δa und Δb ableiten:

$$\Delta b = b_{\text{Hyp}}(a) - b_{\text{Hyp}}(a_0) = b_{\infty} + \frac{k}{a} - \left(b_{\infty} + \frac{k}{a_0} \right)$$

$$\Delta b = -\frac{k \cdot (a - a_0)}{a \cdot a_0} = -\frac{k}{a_0} \cdot \frac{\Delta a}{a}; \quad \Delta a = a - a_0 \quad 47$$

Damit ist die absolute Änderung von b der relativen Änderung von a proportional. Das entspricht der Anschauung.

Literatur

[HELMHOLTZ] <https://www.helmholtz-berlin.de/media/media/forschung/energie/nanospektroskopie/teaching/wintersemester2017-2018/4.-vorlesung.pdf>

[Wiki Sphärische Linsen] [https://de.wikipedia.org/wiki/Linse_\(Optik\)#Sph%C3%A4rische_Linsen](https://de.wikipedia.org/wiki/Linse_(Optik)#Sph%C3%A4rische_Linsen)

[Photonik] Grundlagen der Photonik, Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich
2008 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

[Brucherseifer] <http://brucherseifer.ostwaldportal.de/optik/Brennweitenbestimmung%20von%20Linsen.pdf>